CAMBRIDGE



整数分拆

〔美〕George E. Andrews
〔瑞典〕Kimmo Eriksson 著

傅士硕 杨子辰 译

科学出版社

(O-7051.31)

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS
www.cambridge.org



科学出版社互联网入口
科学数理分社
电 话：(010) 64010624
E-mail：wangliping@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-054545-9



POD 定 价：68.00元

现代数学译丛 29

整数分拆

〔美〕George E. Andrews 著
〔瑞典〕Kimmo Eriksson

傅士硕　杨子辰　译



科学出版社
北京

图字：01-2016-0941

内 容 简 介

本书主要讨论组合数学和堆垒数论中的整数分拆理论. 在内容方面，首先介绍了研究整数分拆的重要工具：双射证明、Ferrers 图和生成函数，并以此证明了著名的 Euler 恒等式和 Euler 五角数定理. 本书取材广泛，不仅讨论了 Rogers-Ramanujan 恒等式、阶梯教室分拆、平面分拆等问题，还建立了整数分拆与 Young 表、钩长公式、偏序集等其他数学对象之间的紧密联系. 在行文方面，作者在力图使本书保持通俗易懂、深入浅出的风格之时，又尽量不失逻辑的严谨性. 从而使得一个高中生也可以轻松地阅读本书的绝大部分内容. 此外，作者还提供了许多优质的练习题并且合理地区分了难度，以使不同层次的读者都能从中充分受益.

本书适合高中生和本科生，以及广大数学爱好者.

图书在版编目(CIP)数据

整数分拆/(美)乔治 ·E. 安德鲁斯 (George E. Andrews), (瑞典) 基莫 ·埃里克松 (Kimmo Eriksson) 著; 傅士硕, 杨子辰译. —北京：科学出版社, 2017.9
(现代数学译丛; 29)
ISBN 978-7-03-054545-9
书名原文: Integer Partitions

Ⅰ. ①整… Ⅱ. ①乔… ②基… ③傅… ④杨… Ⅲ. ①函数–研究 Ⅳ. ①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 231054 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 9 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 9 月第一次印刷 印张: 9 3/4
字数: 174 000

POD定价： 68.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

版 权 声 明

中文版序

我们生命中最大的乐趣之一就是研究整数分拆. 一方面, 这门精彩的学科可以解释给幼小的孩子, 使他们知道整数加法就能理解. 另一方面, 现代数学中最深刻的一些问题都直接或间接地与分拆理论联系在一起. 怀揣着奉献一本高中生和本科生都可以轻松阅读并享受的作品的希望, 我们撰写了《整数分拆》这本书. 现在, 我们无限喜悦地看到这部作品被翻译成中文. 中国许多出色的数学家对分拆理论做出了重要贡献, 因此我们也乐于见到我们这本入门书籍可以被中国广大的数学爱好者阅读.

我们非常感谢傅士硕和杨子辰. 他们二位细心勤奋的工作确保了这个翻译项目的完成.

One of our great pleasures in life has been the study of integer partitions. On the one hand, this wonderful subject can be explained to young children; all you need to know is addition of integers. On the other hand, some of the deepest problems in modern mathematics are connected directly or indirectly with the theory of partitions. We wrote *Integer Partitions* with the hope that we might supply a text easily read and enjoyed by undergraduates and high school students. We are now immensely pleased to see this work translated into Chinese. Many excellent mathematicians in China have made major contributions to the theory of partitions, and we are excited to see our introductory text now being made available to a broad mathematical audience in China.

We are very grateful to Shishuo Fu and Zichen Yang for their care and diligence in seeing this project to completion.

George E. Andrews

Kimmo Eriksson

译 者 序

本书作者之一 G. E. Andrews 是美国国家科学院院士、美国艺术与科学院院士, 以及美国数学学会会士, 现任美国宾夕法尼亚州立大学 Evan Pugh 教授. 他在该校教书育人已有五十二载, 是全校目前任期最长的终身教授. Andrews 教授可谓是著作等身, 除了本书以外还著有数学专著十余本, 其中就包括更为深入探讨整数分拆理论的 *The Theory of Partitions* 以及与 Bruce C. Berndt 合作整理、目前出版至第四卷的系列 *Ramanujan's Lost Notebook*.

另一位作者 Kimmo Eriksson 是瑞典西曼兰省科学院院士, 现任瑞典 Mälardalen 大学教授. 除了撰写本书等数学教材, 他还曾为歌剧 *Kurfursten* 创作剧本.

两位作者都可以说是整数分拆领域的权威专家. 他们严选内容、精心架构, 举重若轻般地为读者奉献了这样一本深入浅出的入门教材. 能够翻译这样的名家著作, 我们深感荣幸的同时也倍感压力, 唯愿原著的易读性不要因为我们的翻译而打了折扣.

本书由科学出版社引进版权, 编辑王丽平女士耐心回答了我们的各种问题, 她的辛勤工作保证了本书的顺利出版, 在此表示衷心的感谢. 还要感谢国家自然科学基金、中央高校基本科研业务费和重庆大学对本书出版的资助.

基于原著日文版的勘误, 本译文都做了相应的修正, 包括对一些参考文献的更新. 由于译者水平有限, 书中出现疏漏在所难免, 还望同行和读者不吝指正.

傅士硕　杨子辰

2016 年 10 月 8 日

前　　言

这是一本关于整数分拆的书. 即使你从未听过这个概念, 我们猜测你已然熟悉它的意义. 举个例子, 有多少种方法将 3 分成一个或多个正整数? 我们可以把 3 当做单独的部分; 或者我们可以取出 2 作为一个部分, 然后剩下的 1 是另一个部分; 又或者我们可以分成三个大小为 1 的部分. 这番极其基础的数学思考给出了问题的答案: "有 3 个 3 的整数分拆."

现今所有分拆理论的文献资料都是为专业数学工作者撰写的. 但是, 当你现在知道整数分拆是什么时, 你也许会同意我们的观点: 即使没有高深的数学知识也应该能学习整数分拆. 所以, 本书的目标就是补上现今文献的空白.

分拆理论的研究吸引了许多伟大数学家, 比如: Euler, Legendre, Ramanujan, Hardy, Rademacher, Sylvester, Selberg 和 Dyson. 他们都对这个简单数学对象的高等理论发展做出了杰出的贡献. 在这本书中, 我们将从头开始, 引领读者一步一步从非常简单的东西开始探索, 直至尚未解决的研究问题. 想要直入主题的愿望指导了我们对课题的取舍. 我们希望能迅速谈到本学科中最为精彩且令人称奇的结果之一: Rogers-Ramanujan 恒等式. 随后我们对生成函数做了充分的介绍, 使得我们可以初步接触到这门学科中许多引人入胜的方面.

本书面向的读者十分广泛. 显然这可以作为本科生分拆理论课程的一本理想的教科书. 我们尝试让本书短小精悍, 以便这些课题可以在一学期内教完. 当然, 也有许多数学爱好者没有接受过高等数学教育. 我们希望这些读者也能感受到本书是为他们量身订做的. 最后, 我们希望任何一个有基础数学知识的读者都能够通过本书步入整数分拆的大门.

为了使本书读起来更加简单且吸引人, 许多论证都被省略了并留作节末的习题. 对于其中许多习题, 你都可以在本书末尾找到提示和解答. 习题的难度是不同的. 所以我们按照如下等级标准估计了习题的难度, 1 意味着简单, 2 意味着你需要一点点解题技巧, 3 意味着你正面临一个相当大的挑战. 希望这样可以帮助你对习题进行预判.

创作这本书的想法源自于两位作者 2000 年在费城举行的会议上的碰面. 从那时起, 所有的工作都是通过瑞典和美国之间的邮件和电子邮件开展的. 我们对提供过帮助的许多人都心存感激. Art Benjamin 和 Carl Yerger 通读了整本书, 发现了一些错误并提出了有用的建议. Kathy Wyland 在宾夕法尼亚完成了一些录入工作.

Brandt Kronholm, James Sellers 和 Ae Ja Yee 阅读了长条校样. 剑桥大学出版社提供了细致的编辑建议. Jim Propp 对第 11 章提出了详尽而有价值的评论.

George E. Andrews
Kimmo Eriksson

目　　录

第1章　绪　　论

数学这项人类活动已经发展了超过一万年.(原始人的)石刻表明,小数字计数法和整数加法的概念早已经被史前洞穴人掌握了.后来,古希腊人发明了有理数、几何学和数学证明的概念.阿拉伯和中国数学家提出了方便的按位计数方法,以及代数的基础——未知数运算.数学的发展自文艺复兴开始便进入了快车道,从先前的诸如解析几何、微积分、数理逻辑、集合论等伟大创造,直至今天数学与计算机科学的协同发展,结下了累累硕果.

我们将会深入探讨,或是至少接触这些现代分支的进展.但是,说真的,这本书所探讨的数学,其实是洞穴人就已经能够理解的!你能想象出以下这种岩石雕刻或洞穴壁画:

```
0__                0__ 0__
 ||                 ||  ||
0__
 ||


0__               0__0__0__
 ||                ||  ||  ||
0__
 ||
0__
 ||


0__0__0__          0__ 0__
 ||  ||  ||         ||  ||
                   0__
                    ||
```

```
O__            O__O__O__O__
 ||             ||  ||  ||  ||
O__
 ||
O__
 ||
O__
 ||


O__O__O__       O__ O__O__
 ||  ||  ||      ||   ||  ||
O__             O__
 ||              ||
```

这里涉及的概念只有小数字计数法、整数相等、整数加法以及奇数和偶数的区别. 上表中展示了：至少对于不超过 4 只动物, 将它们排列成长度为奇数的行的方法数, 与排列成长度互不相等的行的方法数, 是一样多的. 如果将其写在今日的黑板上来替代史前石雕, 这个表可以组织成一个更简洁的形式：

1+1	2
1+1+1	3
3	2+1
1+1+1+1	4
3+1	3+1

上表中, 左列和右列中的和式数量总是相等的这一事实, 被 Leonhard Euler 在 1748 年首次证明. 不过, 很有可能在此之前就已经有人观察到对较小的数字有这一现象了, 这是因为相对于石器时代人类所掌握的数学, 它需要的数学知识并没有多么高深. 在现在, 诸如 $3+1$ 或 $5+5+3+2$ 的这些对象被称为**整数分拆**. 换一种方式说, 一个整数分拆是将一个整数分成若干 (正) 整数部分 (相加) 的方式. 根据定义, 整数分拆与部分的顺序无关, 所以约定分拆的部分按降序排列.

现在, Euler 的惊人结果可以精确地表述为：*每一个 (正) 整数有同样多的方式被分拆为奇部分和相异部分*. 上述表格可以扩展到 5 和 6 的情况：

1+1+1+1+1	5
3+1+1	4+1
5	3+2
1+1+1+1+1+1	6
3+1+1+1	5+1
3+3	4+2
5+1	3+2+1

习题:

1. 继续扩展上表到 10 的分拆并验证 Euler 是对的. 看看你是不是得到某种启发来证明这两类分拆的数量相等. (难度系数: 1)

形如 "每一个数的这类分拆和那类分拆数量相等" 的表述被称为*分拆恒等式*, 上述 Euler 恒等式是第一个, 但还存在着许许多多其他恒等式. 引人入胜的是 (其中) 有很多意想不到的恒等式. 举另一个非常著名的例子: *每一个数被分拆为大小是 $1, 4, 6, 9, 11, 14, \cdots$ 的部分的方式和分拆为部分之差至少为 2 的方式, 是一样多的.*

$1, 4, 6, 9, 11, 14, \cdots$ 最直接可被理解为末位数字为 $1, 4, 6, 9$ 的整数. 另一种描述方式是这些整数被 5 除的余数是 1 或 4. 计算这些余数称为*模运算*, 以后会在这本书中出现几次. 事实上, 令人惊奇的是, 分拆恒等式以及他们的证明和导致的结果, 涉及非常广泛的初等和高等数学, 甚至是现代物理学. 我们希望你会发现整数分拆理论是如此迷人, 从而吸引你去学习这些相关领域的更多知识.

上面提及的最后一个恒等式是在 1894 年和 1913 年由 Leonard James Rogers 和 Srinivasa Ramanujan 分别独立发现的. 这个恒等式的传奇故事丰富多彩, 有些还具有深刻的人文关怀. 其中之一是, 在很长一段时间 Rogers 都只是个寂寂无名的数学家. 直到惊人的天才 Ramanujan 在晚于他二十年后重新发现了他的结果, 给他带来了 (至少在数学界中) 永恒的荣耀. 整数分拆领域充盈着大量或浪漫, 或惊艳, 或饶有趣味的生平轶事, 它们将与数学本身一同被后人传颂赏析. 总而言之, 欢迎来到整数分拆的奇妙世界.

第 2 章　Euler 以及更多

在这一章, 我们将展示 Euler 恒等式和许多其他恒等式如何通过双射方法进行证明. 尽管双射方法优雅且容易理解, 但这并不是 Euler所使用的. Euler 使用了称为*生成函数*的分析工具. 这是一种非常强力的工具, 但需要更多数学知识. 等到第 5 章, 我们再回来研究 Euler 的方法.

本章的重要内容

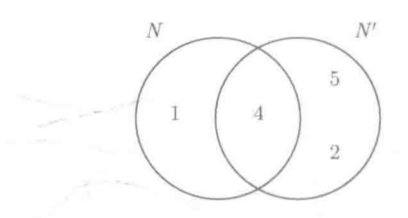
- 我们将介绍集合论的基础知识: 并集、交集和集合的基数.
- 我们将展示双射 (两个集合间一一对应) 如何被用于证明恒等式.
- 我们将使用合并相同部分的方式给出 Euler 恒等式 (每一个整数有同样多的方式被分拆为奇数部分和相异部分) 的双射证明, 它的逆是分裂偶数部分.
- Euler 恒等式将被推广到 "Euler 对", 即两个集合 M 和 N, 满足把数分拆成 M 中相异部分的方式数量等于分拆为 N 中部分的方式数量.

2.1　集 合 术 语

我们需要一些集合论的概念. 特别地, *集合*是指若干互不相同的对象全体, 对象一般称为*元素*. 我们可以在一对花括号中枚举所有集合元素来描述该集合. 举个例子, $\{1,2,4,5\}$ 是一个四元集合, 其中所有元素都是整数. 注意, 集合中元素是无序的, 因此 $\{1,2,4,5\}$ 和 $\{4,5,2,1\}$ 是同一个集合.

如果你舍弃集合中的一些元素, 剩下的元素就构成了一个*子集*. 符号 $\subset$ 表示 "左边是右边的一个子集". 例如, $\{2,5\} \subset \{1,2,4,5\}$.

两个集合 N 和 N' 的*交集*是一个集合, 它的元素同时在 N 和 N' 中, (这个新的集合) 记作 $N \cap N'$. 两个集合是*不交的*, 如果它们没有公共元素, 即它们的交集是空的. N 和 N' 的*并集*是集合 $N \cup N'$, 它包含了同时存在于两个集合或任意一者中的元素. 因此, 如果 $N=\{1,4\}$ 且 $N'=\{2,4,5\}$, 那么它们的交集是 $N \cap N'=\{4\}$, 它们的并集是 $N \cup N'=\{1,2,4,5\}$. 交集和并集可以用所谓 *Venn* 图方便地解释, 例如:



集合 N 中元素数量记作 $|N|$, 常常被称为集合的**基数**(或者就叫大小).

习题:

2. 在上例中, $|N|=2$, $|N'|=3$, $|N\cap N'|=1$, $|N\cup N'|=4$. 注意到 $2+3=1+4$, 这并不是巧合; 事实上, 对任意集合 N 和 N', 总是有 $|N|+|N'|=|N\cap N'|+|N\cup N'|$ 成立. 为什么? 据此还可以得出结论: 两个集合的并集大小等于两个集合各自大小之和, 当且仅当两个集合不交. (难度系数: 1)

2.2 分拆恒等式的双射证明

为了简明扼要地用公式描述分拆恒等式, 我们需要一些记号. 令 $p(n)$ 为给定整数 n 的分拆数量, 我们称 $p(n)$为**分拆函数**. 举个例子, 我们有 $p(4)=5$, 因为 4 有五个不同的整数分拆:

$$1+1+1+1,\quad 2+1+1,\quad 2+2,\quad 3+1,\quad 4.$$

在分拆恒等式中, 我们常常对满足某种条件的分拆数量感兴趣. 我们记这样的分拆数量为 $p(n|[\text{条件}])$. 举个例子, Euler 恒等式就可表示为

$$p(n|\text{部分为奇数})=p(n|\text{部分相异})\quad \text{对任意 } n\geqslant 1. \tag{2.1}$$

现在思考一下这样一个恒等式如何能被证明. 对每个 n, 我们可以列举所有的两类分拆, 计算总数并判断是否相等, 来验证恒等式的正确性. 但是, 这个恒等式对无穷多个 n 值都成立, 所以我们不能逐一验证. 我们必须转而去寻找对每一个正整数 n 都成立的一般性论证. 一个自然的想法是找一个一般的办法对分拆计数, 得到显式表达式, 进而证明恒等式两边相等. 换句话说, 如果我们能证明 $p(n|\text{部分为奇数})$, 比如说, 等于 n^2+2 (或其他表达式), 并且同样地证明 $p(n|\text{部分相异})$ 也等于相同的数, 那么我们显然证明了恒等式成立. 但是我们能找到这样一个显式表达式吗? 从前一章包括习题 1 中的表格, 我们能计算前几个值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n\|$部分为奇数$)$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10

表中数据似乎并没有指向任何简单表达式, 比如关于 n 的多项式. 所以这种方法失败了. 但是我们失败的原因是我们尝试去证明的比我们实际需要证明的要多得多. 如果我们 (仅仅) 想要验证类 X 中的对象数量等于类 Y 中的对象数量, 那么我们 (其实) 不需要去算出那个具体数字, 我们只要将两类对象配对, 去证明类 X 中的每个对象与类 Y 中唯一的对象配对并且反过来也成立. 对于 $n=2,3,4$, 第 1 章中的洞穴石刻就给出了奇分拆和相异分拆之间的一个配对. 这种两个集合之间的一一配对称为**双射**. 因此, 为了证明分拆恒等式, 我们只需要找到问题中所涉及两类分拆间的一个双射.

分拆之间的双射该是什么样子的并不显然. 对于 n 的一个整数分拆是一些加起来等于 n 的整数部分, 所以分拆之间的双射必须用部分上的操作来描述. 一个简单的操作是把偶数部分均分为两个相等部分. 其逆操作则是合并两个相等的部分为两倍大的部分. 这个操作立刻给出了下述恒等式的一个双射证明(图 2.1).

$$x_1 \longmapsto y_1$$

$$x_2 \longmapsto y_2$$

$$x_3 \longmapsto y_3$$

图 2.1　两个三元集之间的典型双射

$$p(n|\text{部分为偶数}) = p(n|\text{每个部分出现偶数次})\quad \text{对任意 } n \geqslant 1. \tag{2.2}$$

对 $n=6$, 考察一下这个双射是如何实现的:

$$\begin{aligned} 6 &\mapsto 3+3, \\ 4+2 &\mapsto 2+2+1+1, \\ 2+2+2 &\mapsto 1+1+1+1+1+1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

习题:

3. 对奇数 n, 不存在部分全为偶数的分拆, 也不存在每个部分均出现偶数次的分拆. 为什么? 对偶数 $n \geqslant 2$, 通过分别找下列两个等式的双射, 从而得到上述恒

等式的另一个双射证明:

$$p(n|\text{部分为偶数}) = p(n/2) = p(n|\text{每个部分出现偶数次}). \tag{2.4}$$

(难度系数：2)

2.3 Euler 恒等式的双射

回到 Euler 恒等式, 它的双射是什么样的？首先它必须有一个性质：我们给它一个奇数部分的集合, 它要返还一个相异部分的集合, 同时保有相同的和. 逆映射正相反.

从奇数部分到相异部分：如果部分相互不同, 则任意部分出现少于两次. 因此如果输入的分拆中某一部分出现不少于两次, 就必须对它做些处理. 正如之前所见, 一个自然的做法是合并这两个部分为一个两倍大的部分. 我们可以重复这个过程直到所有部分都是互不相同的. 因为每次合并操作导致部分数量严格减少, 最迟到只剩一个部分时, 一定能得到相异分拆了. 举个例子：

$$\begin{aligned} 3+3+3+1+1+1+1 &\mapsto (3+3)+3+(1+1)+(1+1) \\ &\mapsto 6+3+2+2 \\ &\mapsto 6+3+(2+2) \\ &\mapsto 6+3+4. \end{aligned}$$

原路返回奇数部分：合并相同部分的逆映射是二等分偶数部分. 重复这个操作最终必然得到一个只含奇数部分的集合, 因为每次操作一些部分严格减小, 最迟到所有部分均为 1 时, 一定能得到部分全为奇数的分拆. 举个例子：

$$\begin{aligned} 6+3+4 &\mapsto 6+3+(2+2) \\ &\mapsto 6+3+2+2 \\ &\mapsto (3+3)+3+(1+1)+(1+1) \\ &\mapsto 3+3+3+1+1+1+1. \end{aligned}$$

这个过程看起来似乎有随意性, 因为可以选择不同的合并 (分裂) 顺序. 然而, 显然的是, 分裂一个部分不会影响分裂别的部分, 所以分裂顺序不影响结果. (同理,) 合并顺序也不会影响, 因为合并就是分裂的逆.

上面我们描述了重复合并相同部分的过程, 给它一个奇分拆, 就可以得到一个相异分拆. 逆转每一步又给出了重复分裂偶数部分的过程, 将相异分拆变换成奇分拆. 因此, 这个过程是证明 Euler 恒等式的双射. 对 $n=6$, 这个双射是这样操作的:

$$\begin{aligned} &5+1 && \mapsto 5+1 \\ &3+3 && \mapsto 6 \\ &3+1+1+1 && \mapsto 3+2+1 \\ &1+1+1+1+1+1 && \mapsto 4+2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

组合数学家的共识是恒等式简洁的双射证明能表现出对于恒等式成立原因的最深刻理解. 用一些习题检测一下你的理解吧!

习题:

4. 对 $n \geqslant 1$, 为什么同样的双射可以证明下列更强的结论?

$$p(n|\text{奇数部分, 每个奇数部分出现偶数次}) \tag{2.6}$$

$$= p(n|\text{相异部分, 每个奇数部分出现偶数次}). \tag{2.7}$$

把所有 "偶" 换成 "奇" 也是对的. (难度系数: 2)

5. 在双射中, 我们合并相同部分对. 把 "对" 换成 "三元组"! 如果我们合并相同部分的三元组直到不存在这种三元组为止. 我们怎么描述得到的分拆? 逆操作是三等分可以被 3 整除的部分. 什么时候这个过程停止? 这个新的双射将证明怎样的恒等式? (难度系数: 1)

6. 推广前一个习题的思路, 证明对任意整数 $k \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 1$:

$$p(n|\text{不存在部分被 } k \text{ 整除}) = p(n|\text{每个部分出现少于 } k \text{ 次}). \tag{2.8}$$

(难度系数: 1)

2.4 Euler 对

这种证明 Euler 恒等式的合并/分裂技巧还有很多应用. 我们可以让它作用别的分拆集合, 比如 A 和 B, 只要分裂过程把 A 的所有分拆变换成 B 的分拆, 并且合并过程就可以把 B 的所有分拆变换回 A.

举个实例, 让 A 是所有把 n 分成部分全为 1 的分拆的集合. A 中分拆数量为 $p(n|\text{部分属于}\{1\}) = 1$, 因为只有一个分拆满足条件, 即 $1+1+\cdots+1$(共 n 个

1). 合并过程会把一对 1 合并成 2, 然后把一对 2 合并成 4, 然后一对 4 合并成 8, 如此进行直到所有部分是相异的. 这就导致对应的分拆集合 B 是所有把 n 分成 $\{1,2,4,8,\cdots\}$(2 的幂) 中相异部分的分拆. 现在我们检验分裂过程可以把 B 中分拆变换到 A 中. 显然任意 2 的幂 (比如 2^k) 可以二等分为 $(2^{k-1}+2^{k-1})$. 因为 2 的幂中只有 $2^0=1$ 是奇数, 所以这个过程会进行直到所有部分变成 1.

因此, 我们得到了一个双射用于证明对任意 $n \geqslant 1$,

$$p(n|\text{部分属于}\{1\}) = p(n|\text{部分是相异的 2 的幂}), \tag{2.9}$$

并且因为左边表达式等于 1, 我们事实上证明了每个正整数具有唯一的相异的 2 的幂的分拆. 这称作整数的*二进制表示*. 例如:

$$\begin{aligned}
1 &= & & & 2^0 &= (1)_2,\\
2 &= & & 2^1 & &= (10)_2,\\
3 &= & & 2^1 &+ 2^0 &= (11)_2,\\
4 &= 2^2 & & & &= (100)_2,\\
5 &= 2^2 &+ & & 2^0 &= (101)_2,\\
6 &= 2^2 &+ & 2^1 & &= (110)_2,\\
7 &= 2^2 &+ & 2^1 &+ 2^0 &= (111)_2,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

这里 $(b_k b_{k-1}\cdots b_0)_2$ 是二进制表示的数 (位). 这个是计算机存储器中存储数字的普遍形式.

我们现在已经在两种情况下使用合并/分裂操作: 一是作为双射证明 Euler 恒等式,

$$p(n|\text{部分属于 } \{1,3,5,7,\cdots\}) = p(n|\{1,2,3,4,5,\cdots\} \text{ 中的相异部分}), \tag{2.11}$$

二是作为双射证明了二进制表示的唯一性,

$$p(n|\text{部分属于}\{1\}) = p(n|\text{部分是相异的 2 的幂}). \tag{2.12}$$

(自然地问), 这种合并/分裂操作能达到的极限是什么呢? 换句话说, 究竟是对哪些集合 N, 我们能得到一个双射, 把部分属于 N 的分拆映射到部分互异且均属于某个集合 M 的分拆. 让我们称这样的一对集合为 *Euler* 对. 对一个 *Euler* 对中的每个部分乘以正的常数 c, 我们容易从原有的 *Euler* 对得到一个新的 *Euler* 对. 举个例子, 把恒等式 (2.9) 中的部分乘 3 得到新的 *Euler* 对恒等式,

$$p(n|\text{部分属于}\{3\}) = p(n|\{3,6,12,24,\cdots\} \text{ 中的相异部分}). \tag{2.13}$$

让我们现在再次审视合并/分裂技巧的操作过程. 从一个部分的集合出发, 它的所有部分都属于 N. 相同部分对被反复合并直到所有余下部分相异为止. 合并的每一步是可以通过分裂偶数部分唯一地追溯回来, 假如我们知道何时停止分裂. 显然, 我们想要在回溯出的部分属于 N 时停止分裂. 但是如果 N 同时包含, 比如 3 和 6, 那么我们就无从知晓到底是应该在出现部分为 6 时停止分裂, 还是实际上原来的部分为 3(图 2.2).



图 2.2 如果 N 同时含有 3 和 6, 那么大小为 12 的部分可以既从合并 $3+3+3+3$ 又从合并 $6+6$ 得到. 所以这个过程不是双射

这个问题会出现当且仅当 N 中存在两个元素, 使得其中第一个是另一个乘以 2 的幂. 因此, 合并/分裂过程证明了下列一般的 Euler 对定理.

定理 1

$$p(n|\text{部分属于 } N) = p(n|M\text{中的相异部分}) \quad \text{对任意 } n \geqslant 1, \tag{2.14}$$

其中 N 是任意整数集合满足 N 中没有一个元素是另一个乘以 2 的幂, M 是一个包含了所有 N 中元素以及这些元素和所有 2 的幂的乘积的集合.

这个定理的原始想法来自 I. Schur, 但是它的最广义形式首次发表在 Andrews 的论文 (1969b) 中. Schur 从未有发表过关于这个课题的论文, P. Bachman 的*Niedere Zahlentheorie* 将此归功于 J. Schur. 首字母 "J." 也被用在 Dickson 的*History of the Theory of Numbers* 卷 II. 这种混淆让 Andrews 在许多论文引用中采用 "I. J. Schur". 事实上, Schur 总是署名 "I. Schur" 发表文章.

习题:

7. 记 $\lfloor x \rfloor$ 是小于等于 x 的最大整数. 用定理 1 证明 $\lfloor n/3 \rfloor + 1$ 是满足每个部分或是 2 的幂或是 3 乘 2 的幂的相异分拆数量. (难度系数: 2)

我们现在已经发现运用合并/分裂过程来证明 Euler 对定理的极限. 有人可能想知道是否存在用这种方法不能找到的其他 Euler 对. 让我们来研究一下!

定理中不包括的一个典型集合是 $N = \{1, 3, 6\}$, 因为 6 等于 3 乘 2 的幂. 我们可以试着来构造一个对应的集合 M, 使得 (N, M) 是一个 Euler 对.

n	1	2	3	4	5	6
$p(n\|$部分属于 $\{1,3,6\})$	1	1	2	2	2	4

根据上表, 我们可以逐部分地构造 M, 使其满足 $p(n|$部分属于$\{1,3,6\})=p(n|M$中的相异部分). 从 $M:=\varnothing$[1]开始.

1. 表中 1 的分拆有一个, 用 $M=\varnothing$ 无法构造 1 的相异分拆, 所以 1 必须加入 M.
2. 表中 2 的分拆有一个, 用 $M=\{1\}$ 无法构造 2 的相异分拆, 所以 2 必须加入 M.
3. 表中 3 的分拆有两个, 用 $M=\{1,2\}$ 只能构造 $2+1$ 这一个相异分拆, 所以 3 必须加入 M.
4. 表中 4 的分拆有两个, 用 $M=\{1,2,3\}$ 只能构造 $3+1$ 这一个相异分拆, 所以 4 必须加入 M.
5. 表中 5 的分拆有两个, 用 $M=\{1,2,3,4\}$ 能构造两个 ($3+2$ 和 $4+1$) 相异分拆, 所以 5 不能加入 M.
6. 表中 6 的分拆有四个, 用 $M=\{1,2,3,4\}$ 只能构造两个相异分拆 ($3+2+1$ 和 $4+2$), 如若将 6 加入 M, 也只得到了一个新的相异分拆, 无法再得到另一个.

我们在第六步失败了. 因为 M 是前五步所构造出的唯一集合, 所以不可能有其他可替代的集合了. 因此 $N=\{1,3,6\}$ 不存在对应的 Euler 对. 事实上, 除了定理 1 所给出的以外, 就没有其他 Euler 对了. 你可以利用接下来的一系列习题来尝试证明这个结论.

习题:

8. 对于给定的集合 N, 至多有一个集合 M 使得 (N,M) 形成 Euler 对. 为什么? 反向思考: "如果有两个不同的这样的集合, M 和 M', 那么就会存在一个最小的整数 n 仅含于其中一个集合." 对比一下 $p(n|M$中的相异部分) 以及 $p(n|M'$中的相异部分), 上述事实意味着什么? (难度系数: 2)
9. 对于给定的集合 N, 其中存在一个元素是另一个元素乘以 2 的幂, 比如说 2^ka 和 a, 那么不存在集合 M 使得 (N,M) 形成 Euler 对. 为什么? 令 2^ka 是前述提到的元素中最小的, 证明 M 对所有 $n<2^ka$ 都能被唯一地成功构造, 但是构造会在 $n=2^ka$ 时失败, 正如之前的例子所展示的那样. (难度系数: 2)
10. 证明 Euler 对可以被更加清楚地刻画为集合对 (N,M) 使得 $2M\subset M$ 且 $N=M-2M$. (难度系数: 3)

[1]译注: $\varnothing$ 在集合论中表示空集, 是不含任何元素的集合.

11. (Andrews, 1969a)证明把 n 分成部分全为 k 的幂 ($k > 1$), 其中每个部分出现不超过 $k-1$ 次的分拆数量总是 1. (难度系数: 3)

第 3 章　Ferrers 图

分拆的图形表示不仅对第 1 章中假想的洞穴人是有用的, 分拆中许多令人惊叹的结果最好的解释是由图形给出.

本章的重要内容

- Ferrers 图和 Ferrers 板是两种相似的分拆的图形表示: 分别用点或方格组成的行表示分拆的部分.
- 我们可以通过互换 Ferrers 图的行和列从一个分拆得到它的共轭分拆.
- 分拆函数 $p(n)$ 增长得有多快? 我们将证明著名的 Fibonacci 数是它的上界.
- 用 Ferrers 图漂亮地证明分拆恒等式的一个例子是 Bressoud 的漂亮双射:

$$p(n \mid \text{部分超相异}) = p(n \mid \text{部分相异, 偶数部分} > 2 \cdot [\# \text{ 奇数部分}]).$$

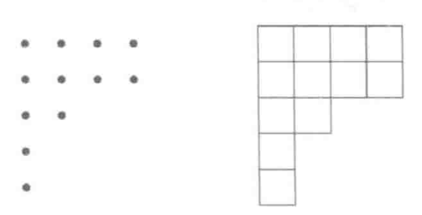
- 一个真正经典的证明是 Franklin 关于 Euler 五角数定理的证明, 即

$$p(n \mid \text{部分相异, 偶数个部分}) = p(n \mid \text{部分相异, 奇数个部分}) + e(n),$$

  其中 $e(n)$ 是 0, 除非存在一个整数 j, 使得 n 是一个五角数 $j(3j \pm 1)/2$, 此时 $e(n) = (-1)^j$.

3.1　Ferrers 图和 Ferrers 板

对一个分拆, 有两种常见的方法画一个对应的图形表示, 比如说: 4+4+2+1+1.

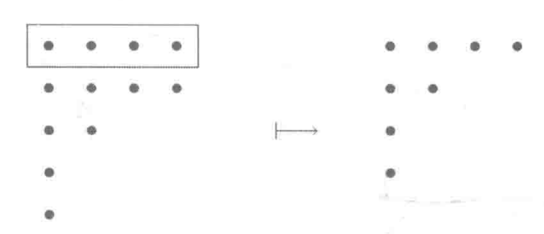


有时候, 用点表示看起来最好, 我们称之为 $4+4+2+1+1$ 的 *Ferrers* 图. 在其他情况, 用方形表示更加自然, 我们称之为 *Ferrers* 板(或 *Young* 图).

习题:

12. 从我们的上一个例子中, 可以推测出 Ferrers 图的形式定义. 等距点构成的行应该要满足什么条件才是 Ferrers 图? (难度系数: 1)

这章大部分内容将处理 Ferrers 图的各种变换. 如果一个变换是可逆的, 那么它是一个双射并且可以用于证明某些分拆恒等式. 一个非常基本的变换例子, 是将上述 Ferrers 图的第一行去掉.



我们注意到: 如果我们从 Ferrers 图中去掉了第一行, 剩下一个新的 Ferrers 图. 如果 r 是被去掉行的长度, 那么新的 Ferrers 图中的所有行的长度都不超过 r. 反过来, 对任意这样的 Ferrers 图, 我们可以在顶部添加长度为 r 的一行得到一个 Ferrers 图. 因此我们用双射证明了分拆恒等式

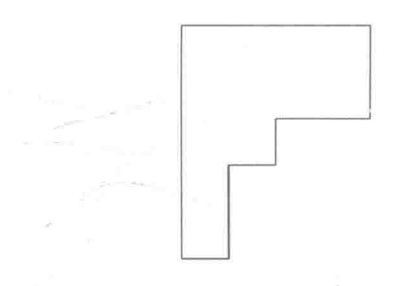
$$p(n|\text{最大部分是}r) = p(n-r|\text{所有部分} \leqslant r).$$

这种变换的一个容易理解的变形是将第一列 (而不是第一行) 去掉. (这样) 我们得到一个新的 Ferrers 图, 其所有列的长度均不超过被去掉列的长度. 但第一列的长度是行的数量, 即, 分拆的部分的数量. 因此去掉列的变换证明了恒等式

$$p(n|m\text{个部分}) = p(n-m|\text{至多 } m \text{ 个部分}).$$

现在我们重新看看 Ferrers 板的形状. 它的轮廓包含了顶部的一条横线, 左侧的一条竖线, 以及从西南角到东北角的倾斜的不规则边框. 明显地, 分拆的信息都蕴含在这条边框中.

边框的角明显有两种: 形如 ⌟的外角以及形如 ⌜的内角. 边框的两个端点算作内角. 外角对应着被去掉也能保证剩下部分依然是 Ferrers 板的方格. 类似地, 内角对应着可添加一个方格保证新图形也是 Ferrers 板的位置. 在第 11 章, 我们将会研究以这种方式增长的 Ferrers 板.



习题:

13. 外角的位置可以唯一决定一个分拆吗？ (难度系数：1)
14. 内角的位置可以唯一决定一个分拆吗？ (难度系数：1)
15. 假设我们在每个内角处都放置一个点来扩大一个分拆. 证明新的分拆有更多的内角. (难度系数：2)

3.2 共 轭 分 拆

假设在幻灯片上画一个 Ferrers 图, 结果弄错了以致投影仪上的幻灯片正面朝下放置 (对数学报告人来说再正常不过的情况). 然后这个图像仍将是 Ferrers 图. 这个笨拙的报告人 (不经意间) 使用了一个变换, 称为**共轭**.

$$
\begin{array}{llll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & & \\
\bullet & & & \\
\bullet & & &
\end{array}
\quad \longmapsto \quad
\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & & &
\end{array}
$$

(来看看具体) 发生了什么呢? 第一个图的行变成了第二个图的列, 并且反过来也是. 因此这个变换得到一个分拆满足, **最大的部分**等于原分拆的**部分数量**. 这给出了另一个分拆恒等式的双射证明:

$$p(n|m\text{个部分}) = p(n|\text{最大部分是}m). \tag{3.1}$$

习题:

16. 找到对应的共轭分拆: (a) $3+3+2+2+1+1$, (b) $7+1$, (c) $5+4+2+2+1$. (难度系数：1)

17. 对 $n = 7$ 以及 $m = 3$, 列举所有的分拆配对以此验证共轭变换证明了式 (3.1). (难度系数：1)
18. 用共轭给出以下恒等式的完全双射证明

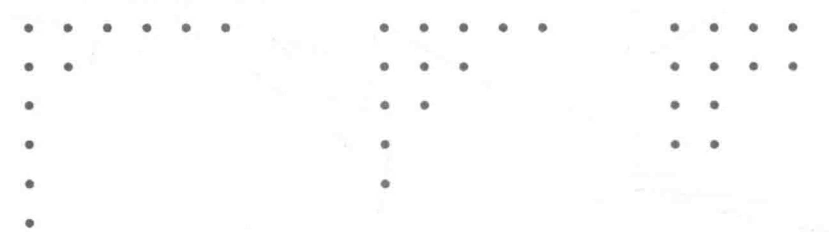
$$p(n|\text{部分数量不超过}m) = p(n|\text{所有部分不超过}m). \tag{3.2}$$

(难度系数：1)
19. 补全习题 17 中的列表, 进而对 $n = 7$ 以及 $m = 3$, 证明式 (3.2). (难度系数：1)
20. 分拆恒等式的条件经常涉及*部分的大小*以及*部分数量*. 我们已经看到这些概念是怎样通过共轭联系起来的. 另一个常见的条件是部分*相异*. 利用共轭证明

$$p(n|\text{部分相异}) = p(n|\text{部分长度遍历 1 到最大部分的所有值}). \tag{3.3}$$

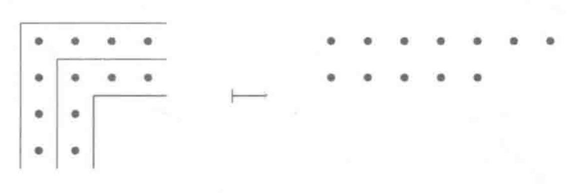
举个例子, 对 $n = 6$, 左边计数了四个分拆 $6, 5+1, 4+2$ 和 $3+2+1$, 而右边计数了四个分拆 $1+1+1+1+1+1, 2+1+1+1+1, 2+2+1+1$ 和 $3+2+1$. (难度系数：2)

一个分拆称为*自共轭*, 如果它就是自己的共轭 (一些数学家可能会称自共轭分拆是共轭变换的不动点). 举个例子, 12 的自共轭分拆有 $6+2+1+1+1+1$, $5+3+2+1+1$ 以及 $4+4+2+2$:



自共轭分拆到相异奇分拆有一个自然的变换, 你能看出来吗?

取出第一行以及第一列中的所有点作为 (新分拆的) 行, 取出第二行以及第二列剩余的点作为 (新分拆的) 行, 以此类推. 因为自共轭分拆关于西北到东南的对角线是对称的, 因此我们总是在合并一样长的行和列 —— 并且因为它们有一个公共点, 导致该行的长度是原来行的两倍减一, 所以是奇的. 从图中明显能看出为什么新分拆是相异的.



反过来, 从相异奇分拆出发, 我们也能将每个奇数部分弯曲成为唯一的对称钩, 而且这些钩可以一一嵌套, 构成一个自共轭的 Ferrers 图. 这个双射证明了恒等式

$$p(n|\text{自共轭}) = p(n|\text{部分相异且为奇数}). \tag{3.4}$$

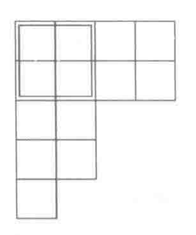
习题:

21. 我们称一个分拆是*长矩形*, 如果它的 Ferrers 图是一个矩形满足, 长度不小于高度. 使用上述合并行与对应列的方法证明

$$p(n|\text{相邻部分相差2}) = p(n|\text{长矩形}). \tag{3.5}$$

(难度系数: 1)

22. 证明 $p(n|\text{长矩形})$ 等于 n 的小于等于 $\sqrt{n}$ 的因子个数. (难度系数: 1)
23. 证明 n 的因子的数量是奇数, 当且仅当 n 是完全平方数. (难度系数: 2)
24. 证明 $p(n)$ 是奇的, 当且仅当 $p(n|\text{部分相异且为奇数})$ 是奇的. 使用式 (3.4). (难度系数: 2)
25. Ferrers 板的 Durfee *方形*是能嵌入板中的最大正方形. 举个例子, 4+4+2+1+1 的 Durfee 方形的尺寸是 2:



观察 Durfee 方形的下方和右方的小 Ferrers 板. 试着证明

$$p(n|\text{Durfee 方形的边长} = j) = \sum_m p(m|\text{部分} \leqslant j)p(n - j^2 - m|\text{部分} \leqslant j).$$

在第 8 章, 我们将回来讨论 Durfee 方形. (难度系数: 2)

3.3　$p(n)$ 的上界

分拆函数 $p(n)$随着 n 的变大, 增长有多快呢? 是像多项式还是一个指数函数, 或者别的什么? 就此而论, 我们甚至不知道如何能确定 $p(n)$ 正如它直观看起来一样, 是一个单调增长函数.

关于这些问题的完整答案是相当复杂的 —— 事实上, 我们怀疑在你之前的学习中都未曾遇到过如分拆函数这般复杂的函数! 在第 6 章, 我们将粗略地研究一下这个罕见的怪物.

在当前这节中, 我们将看到 Ferrers 图的变换给出了几个有趣的部分答案. 让我们从证明 $p(n)$ 真的必须随 n 的变大而增长开始. 换句话说, 我们想要证明

$$p(n) > p(n-1) \quad 对任意\ n \geqslant 2.$$

作为一个例子, 比较一下 3 的分拆:

```
•        • •        • • •
•        •
•
```

与 4 的分拆:

```
•     • •     • • •     • •     • • • •
•     •       •         • •
•     •
•
```

对每个 $n-1$ 的分拆, 我们通过在最底部添加一个点构成新的一行, 得到一个 n 的分拆. 反过来, 对每个最后一行是单点行的 n 的分拆, 去除该点便给出了一个 $n-1$ 的分拆. 所以 $p(n-1) = p(n|$ 至少有一个 1-部分)[①], 从而

$$p(n) = p(n-1) + p(n|没有\ 1\text{-部分}) > p(n-1) \quad 对任意 n \geqslant 2. \tag{3.6}$$

习题:

26. 列出所有 5 的分拆的 Ferrers 图, 并且标出那些 (在上述双射中) 与 4 的分拆对应后剩下的分拆. (难度系数: 1)

---

①译注: 原文没有准确定义 k-部分. 此处特别指出: k-部分是指大小为 k 的部分, 后文将大量使用.

所以 $p(n)$ 是单增函数. 我们的下一个任务是确定增长速度的某个上界, 我们的这个上界将是著名的Fibonacci 数. 这些数曾被意大利比萨的数学家比萨城的Leonardo(绰号是 "Fibonacci"——Bonaccio 的儿子) 在他的著作 *Liber Abaci* (1202)中研究过. Fibonacci 和他的数字都是值得深入研究的有趣对象.

Fibonacci 数 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 按以下方式递归定义

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{并且} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{对任意} n \geqslant 2. \tag{3.7}$$

一个定义是递归的, 若被定义的同类对象被用在定义本身中. 在我们的例子中, 第 n 个 Fibonacci 数是定义为前两个 Fibonacci 数之和. 明显地, 为了启动这个递归, 需要给出两个初始值, 这就是为什么最初两个 Fibonacci 数 $F_0 = 0, F_1 = 1$ 是定义的一部分.

习题:

27. 计算前十个 Fibonacci 数. (难度系数: 1)
28. 用 $n-1$ 替换定义中的 n 得到 $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3}$, 对任意 $n \geqslant 3$. 用这个式子证明 (a)

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1 \text{并且} F_n = 2F_{n-1} - F_{n-3} \quad \text{对任意} n \geqslant 3$$

以及 (b)

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1 \text{并且} F_n = 2F_{n-2} + F_{n-3} \quad \text{对任意} n \geqslant 3$$

都是 Fibonacci 数的合理新定义. (难度系数: 2)

29. 对偶数 n 证明 $F_n = F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \cdots$. (难度系数: 2)
30. 一个整数的*有序分拆*是关心部分顺序的分拆. 举个例子, 4 的分成 1-部分和 2-部分的有序分拆为 $2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2$ 以及 $1+1+1+1$, 总共 5 个. 同时注意到第五个 Fibonacci 数也是 5. 证明对任意的 $n \geqslant 1$, n 分成 1-部分和 2-部分的有序分拆数等于 F_{n+1}. (难度系数: 2)

现在让我们回到式 (3.6): $p(n) = p(n-1) + p(n|$ 没有 1-部分). 为了与 Fibonacci 数的递归比较, 我们想要知道 $p(n|$ 没有 1-部分) 和 $p(n-2)$ 比较起来差多少.

首先, 我们观察到 $p(n-2) = p(n|$ 至少有一个 2-部分), 因为插入/去掉一个 2-部分是两种分拆之间的双射. 其次注意到我们可以把任意没有 1-部分的分拆变换成唯一的至少有一个 2-部分的分拆, 方法是把最小的部分 (至少是 2) 切成一个 2-部分以及零个或更多 1-部分.

对 $n=6$, 第一个双射 (向 $n-2$ 的分拆中插入一个 2-部分) 把

```
•        • •        • • •        • •        • • • •
•        •          •            • •
•        •
•
```

分别变成

```
• •        • •        • • •        • •        • • • •
•          • •        • •          • •        • •
•          •          •            • •
•          •
•
```

除了第二个图, 我们可以合并所有 1-部分和一个 2-部分得到一个新的最小部分, 进而得到四个 6 的分拆不含 1-部分:

```
• • • • • •        • • •        • •        • • • •
                   • • •        • •        • •
                                • •
```

上面的论证实际上证明了:

$$p(n-2)=p(n|\text{没有 1-部分})+p(n-2|\text{最小的非 1-部分}<2+\#\text{1-部分}) \tag{3.8}$$

最后一项总是非负的. 因此, 结合式 (3.6), 就蕴涵了类 Fibonacci 的不等式

$$p(n)\leqslant p(n-1)+p(n-2) \quad \text{对任意} n\geqslant 2. \tag{3.9}$$

现在我们可以用数学归纳法证明$p(n)$的上界了.

定理 2 对所有 $n\geqslant 0$, 分拆函数 $p(n)$ 小于等于第 $n+1$ 个 Fibonacci 数 F_{n+1}.

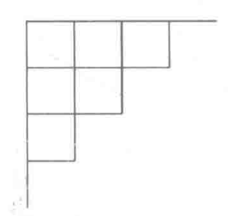
证明 因为 $p(0)=F_1=p(1)=F_2=1$, 命题对 $n=0$ 和 $n=1$ 成立. 假设对 $k\geqslant 2$, 它对所有 $n<k$ 都成立, 那么

$$\begin{aligned}p(k)&\leqslant p(k-1)+p(k-2) \quad (\text{式}(3.9))\\&\leqslant F_k+F_{k-1} \quad (\text{归纳假设})\\&=F_{k+1} \quad (F_k\text{的定义}).\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此, 命题对所有 $n\geqslant 0$ 成立. 证毕.

习题:

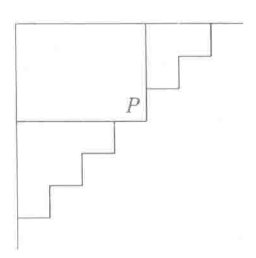
31. 对 $n = 1, 2, \cdots, 10$, 比较 $p(n)$ 和 F_{n+1} 的值. 从哪一个 n 开始两者不同? 为什么? 从上面的论证中找到答案. (难度系数: 1)
32. 在上个命题中, 我们知道 $p(n)$ 至多增长得与 Fibonacci 数一样快. 但是它们增长得多快呢? 记τ 为 "黄金分割数"$(\sqrt{5}+1)/2$①. 用归纳法证明 $\tau^{n-1} \leqslant F_{n+1} \leqslant \tau^n$ 对所有 $n \geqslant 0$. (难度系数: 2)
33. 著名程度仅次于 Fibonacci 数的组合整数序列是 Catalan 数, $C_m = \binom{2m}{m} \Big/ (m+1)$. 我们将分拆 $1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1)$ 的 Ferrers 板称作高为 m 的阶梯形, 且为了方便我们在两端添加空步. 例如, 高为 4 的阶梯形看起来如下:



验证可完全置入高为 m 的阶梯形的 Ferrers 板的数量 (含空板)就是 C_m, 对 $m = 1, 2, 3, 4$. (难度系数: 1)
34. Catalan 数满足递归关系

$$C_{m+1} = C_0C_m + C_1C_{m-1} + C_2C_{m-2} + \cdots + C_mC_0 \quad 对任意m \geqslant 0,$$

其中 $C_0 = 1$. 通过考虑阶梯形与 Ferrers 板重合的最低点 P, 证明可以完全置入高为 m 的阶梯形的 Ferrers 板的数量也满足同样的递归关系.



(难度系数: 3)

---

①译注: 此处原文的确是 $(\sqrt{5}+1)/2 = 1.618\cdots$, 而不是国内常用的 $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.618\cdots$. 事实上, $a : b = (\sqrt{5}+1)/2$ 当且仅当 $b : a = (\sqrt{5}-1)/2$, 所以从比例来说, 两者是一致的.

3.4　Bressoud 的优美双射

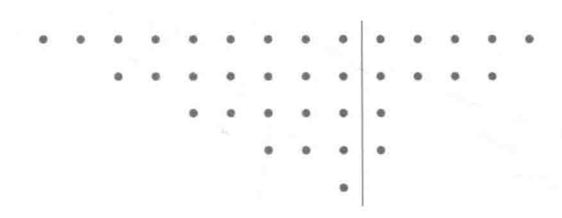
描述一个集合中的数相异的另一种方法是, 任意一对数之差至少为 1. 我们称部分是*超相异*的, 如果 (任意一对数之) 差至少为 2. 我们将要呈现一个关于相异和超相异部分的恒等式的相对现代的双射证明.

因为超相异分拆同时也是一个相异分拆, 所以后者数量更多. 举个例子, 11 分成超相异部分的分拆有 7 个: $11, 10+1, 9+2, 8+3, 7+4, 7+3+1, 6+4+1$. 而部分相异但非超相异的分拆还有一些: $8+2+1$, $6+5$, $6+3+2$, $5+4+2$, 以及 $5+3+2+1$. 我们将要证明下面这个看起来有点奇怪的定理.

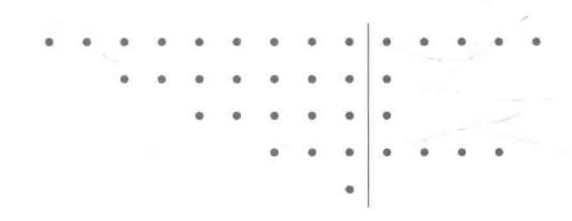
定理 3

$$p(n|\text{部分超相异}) = p(n|\text{部分相异, 偶数部分} > 2\cdot(\#\ \text{奇数部分})).$$

对 $n = 11$, 右边表达式计数了 7 个分拆, 11, $10+1$, $8+3$, $7+4$, $7+3+1$, $6+4+1$ 以及 $6+5$. Bressoud (1978)的双射证明是如下操作的: 对任意一个超相异分拆, 调整它 Ferrers 图的左边缘使其逐行缩进两个点, 构成一条斜线边缘. 画一条竖线使得最后一行在竖线的左侧只有一个点, 倒数第二行在左侧有三个点, 以此类推. 因此, 对于 $14+11+6+4+1$, 图看起来是



在竖线的右侧, 我们得到了一个新的 Ferrers 图, 我们现在重排它的行, 从长度递降的奇数行开始, 放置于最顶部, 紧接着排递降的偶数行.



(现在可以) 不管这根线了, 把这个图中的行当作一个分拆的部分, 我们得到 $14+8+6+7+1$, 一个相异分拆满足偶数部分大于 4(即: 奇数部分数量的两倍).

习题:

35. 解释下为什么 Bressoud 的方法总产生相异分拆满足偶数部分大于奇数部分数量的两倍. (难度系数: 2)
36. 解释下为什么这个方法是可逆的, 即: 为何每个满足偶数部分大于奇数部分数量的两倍的相异分拆恰能被得到一次. (难度系数: 2)
37. 探究一下如果竖线右侧行的重排方法改为偶数部分在前, 奇数部分在后 (都是递降地排列), 那么会发生什么? (难度系数: 2)
38. 迷你研究课题: 对于究极相异分拆 (所有的差至少是 3), 尝试描述并证明一个类似的结果. (难度系数: 3)

3.5 Euler 五角数定理

Euler 是历史上最高产的数学家之一. 他的全部文集共有数千页. 因此, 不止一个分拆恒等式以他命名不足为奇. 除了关于奇分拆和相异分拆的 Euler 恒等式以外, 我们现在来介绍他的关于具有奇 (偶) 数个部分的相异分拆的恒等式. 事实上, Legendre 是第一个用纯粹分拆的语言描述 Euler 结果的人. 与我们至今学过的所有恒等式所不同, 这个恒等式不再是 (两类分拆) 一直相等, 而是对一些情况有一个修正项.

定理 4 (Euler 五角数定理)

$$p(n|\text{部分相异, 偶数个部分}) = p(n|\text{部分相异, 奇数个部分}) + e(n), \tag{3.11}$$

其中当存在整数 j 使得 $n = j(3j \pm 1)/2$ 时, $e(n) = (-1)^j$; 其余情况 $e(n) = 0$.

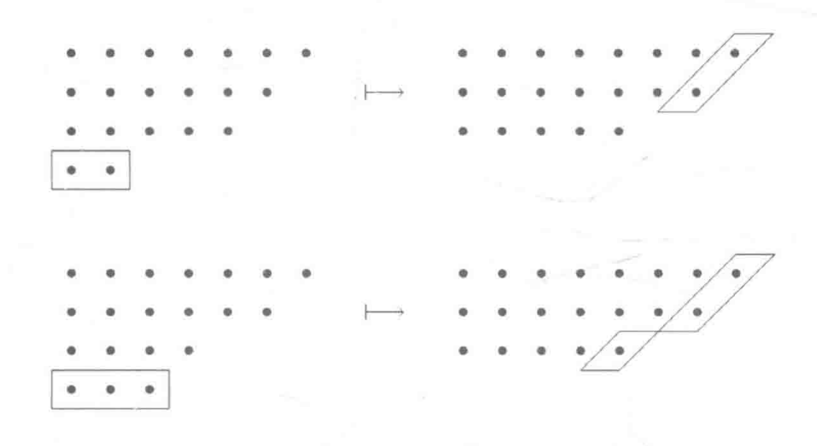
我们不妨从这个定理的名字开始着手讨论. **三角数**是 $1, 3, 6, 10, \cdots$, 对应于尺寸递增的三角形阵列所含点数:

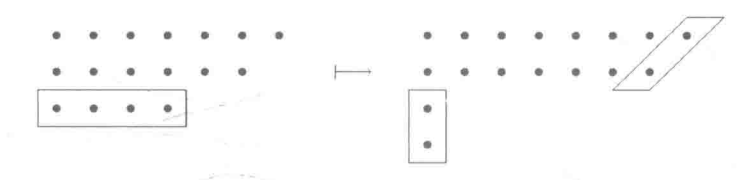
第 j 个三角数是 $1+2+3+\cdots+j = j(j+1)/2$. 类似地, **五角数**是 $1, 5, 12, 22, \cdots$, 对应于尺寸递增的五角形阵列所含点数:

明显地, 第 j 个五角数可看作第 j 个三角形置于宽为 j, 高为 $j-1$ 的矩形顶部. 因此, 第 j 个五角数等于 $j(j+1)/2+j(j-1)$, 化简一下, 等于 $j(3j-1)/2$. 现在让我们横置五角形并且将三角形中的那些点调整为水平的行, 以确保最后我们得到 Ferrers 图:

我们看到这是某些相异分拆的 Ferrers 图: $1, 3+2, 5+4+3, 7+6+5+4$, 等等. 这些特定的分拆将会作为特例出现在下面这个 Euler 五角数定理的证明中. 这个双射证明是由 Franklin 在 1881年找到, 它获得了当之无愧的名声.

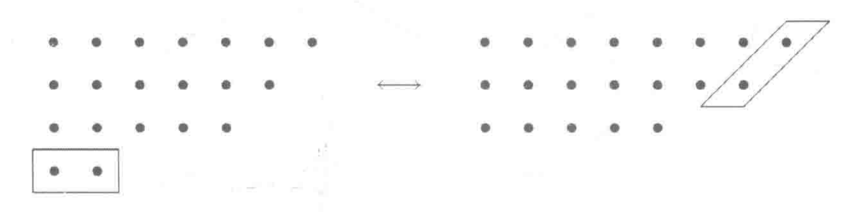
我们将试着建立起一个双射, 一边是将整数 n 分成偶数个相异部分的分拆, 另一边是将 n 分成奇数个相异部分的分拆. 达成这个目标的最佳方案是这样一个可逆变换, 它将部分数量改变 1, 同时保持部分的相异性. 因此, 第一个思路就是将最小的部分取出, 将它所含的点分配到剩余的行中, 每一行分配一个点直到用尽, 会发生什么呢? 来看三个例子:





如果行数至少和被取出部分的点数一样多, 那么这个变换得到一个相异分拆, 就像我们在前两个例子中看到的. 但是我们需要更强的条件来保证这个变换可逆, 因为前两个例子事实上得到了同一个分拆. 让我们来看看一个合理的逆映射应当如何定义.

在反过来的方向, 我们将从最大的一些部分中各取出一个点, 组成一个新的最小行. 一种良定义的移动点数是从最长行开始, 依次相差一个点的行数. 换句话说, 我们将移动 Ferrers 图最右侧的对角线.



我们什么时候应该移出最短行, 什么时候移出最右侧对角线? 唯一合理的规则是: 如果对角线比最短行还短时, 就移动对角线, 反之移动后者.

然而, 还有一种情况会使得上述变换不能产生一个合法的 Ferrers 图, 即, 当最短行与最右侧对角线在 Ferrers 图的右下角相交, 并且最短行长度等于对角线或比对角线多一个点时:



第一种情况的 Ferrers 图是含有 $j(3j-1)/2$ 个点的五角形, 也就是我们在这一节的开始所考虑过的. 第二种情况中的五角形在矩形部分多了额外一行, 使得总的尺寸为 $j(3j+1)/2$ 个点. 除了这些五角数分拆, 我们所描述的这个变换, 将 n 的奇相异分拆与 n 的偶相异分拆进行了两两配对. 因此,

$$p(n|\text{部分相异, 偶数个部分}) = p(n|\text{部分相异, 奇数个部分}) + e(n),$$

其中 $e(n) = 0$, 除非存在整数 j, 使得 $n = j(3j \pm 1)/2$. 此时若部分数量 j 是偶数时, $e(n)$ 是 1; 如果是奇数时就是 -1. 这证明了 Euler 五角数定理.

习题:

39. 如果 P 是 n 的一个分拆，定义基数函数 $|\cdots|$ 为 $|P|=n$. 找一个双射将一对分拆 $(P,P_{偶相异})$ 映射到 $(P',P_{奇相异})$，其中 P 和 P' 是任意分拆，$P_{偶相异}$ 和 $P_{奇相异}$ 分别是偶相异分拆和奇相异分拆，并且要保持总的点数不变：$|P|+|P_{偶相异}|=|P'|+|P_{奇相异}|$. (难度系数：3)
40. 从上一题中，推导出对 $n\geqslant 1$，

$$\sum_{k\geqslant 0}p(n-k)p(k|部分相异，偶数个部分)$$

等于

$$\sum_{k\geqslant 0}p(n-k)p(k|部分相异，奇数个部分).$$

用 Euler 五角数定理证明结论

$$\sum_{j\geqslant 0}p(n-j(3j\pm 1)/2)(-1)^j=0.$$

解释这个公式怎么被翻译为分拆函数的递归关系：

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+\cdots.$$

这个递归关系将在第 5 章中用另一种方式推导并深入探讨. (难度系数：2)
41. 解释 Franklin 的双射为什么也证明了Fine 的下列定理：$p(n|部分相异，最大部分为奇数)-(n|部分相异，最大部分为偶数)=(-1)^j$，当 $n=j(3j\pm 1)/2$；否则为 0. (难度系数：2)
42. 或许你会忍不住尝试将 Franklin 的想法运用到超相异分拆上去，这种情况下最右侧对角线具有一半的斜率. 如果你不小心，你可能会得出一个错误的结论：当部分数分别为奇数和偶数时，有同样多这样的分拆，除了 $n=2j^2-j,2j^2,2j^2+j$. 解释一下，怎么会得到这个错误的结论以及是什么疏忽所导致的. (难度系数：3)
43. 用 Sylvester的双射证明分拆恒等式：

$$p(n|偶数个部分)-p(n|奇数个部分)=(-1)^n p(n|部分为相异的奇数).$$

研究所有不是分为相异奇数部分的分拆集合. 当最大的偶数部分的一半比最大重复部分大，就将最大的偶数部分均分成两半. 否则，就合并两个最大的重

复部分. 确定 n 分成相异的奇数部分的分拆的部分数量的奇偶性，从而完成证明. (难度系数：3)

44. 用前一题同样的双射证明

$$\begin{aligned}&p(n|\text{偶数个偶数部分}) - p(n|\text{奇数个偶数部分})\\=&p(n|\text{部分为相异的奇数}).\end{aligned}$$

注意到上一题中的 $(-1)^n$ 因子不存在了！为什么？ (难度系数：2)

第 4 章 Rogers-Ramanujan 恒等式

在这一章, 我们将要展示迄今为止发现的最负盛名最令人惊叹的分拆恒等式 ——Rogers-Ramanujan 恒等式, 以及形式上与之相关的 Schur 恒等式.

本章的重要内容

- 许多分拆恒等式, 例如 Euler 所发现的, 形式上都是某种类型的分拆数量等于部分属于某个特定集合的分拆数量.
- 两类 Rogers-Ramanujan 恒等式都是这种类型, 其中的两个特定集合分别是由模 5 同余于 ± 1 和模 5 同余于 ± 2 的数所组成. 我们将要说明这些恒等式如何能被 "发现".
- Euler 和 Rogers-Ramanujan 恒等式的形式引发了 Alder 猜想, 这目前还是整数分拆理论中的一个公开问题.
- 与这些结果有关的是 Schur 恒等式, 其对应的特定集合由模 6 同余于 ± 1 的数所组成. 我们将展示 Bressoud 巧妙的双射.

4.1 分拆恒等式的基本形式

许多分拆恒等式有如下基本结构, 对某些整数的集合 N,

$$p(n|[\text{某种条件}]) = p(n|\text{部分属于}N) \quad \text{对任意}n > 0. \tag{4.1}$$

我们已经看到不少这种类型的恒等式以及各式各样的证明方法. 下面给一些例子:

$$p(n|\text{每个部分出现偶数次}) = p(n|\text{部分是偶数}),$$

在第 2 章中用合并/分裂方法证明. 这是 (4.1) 类型的恒等式, 其中 N 是正偶数的集合. 第 2 章以一个更具一般性的恒等式结束:

$$p(n|M\text{中的相异部分}) = p(n|\text{部分属于}N) \quad \text{对 Euler 对}(N, M),$$

这显然是 (4.1) 类型的恒等式. 在第 3 章, 共轭变换被用于证明

$$p(n|\text{不超过}k\text{个部分}) = p(n|\text{最大部分不超过}k).$$

这个恒等式也是 (4.1) 类型的, 其中 $N=\{1,2,3,\cdots,k\}$.

习题:

45. 回想一个不是 (4.1) 类型的分拆恒等式. (难度系数: 1)
46. 证明下列 (4.1) 类型的恒等式:

$$p(n|\lambda_2+\lambda_1, \text{其中}\lambda_2 \geqslant 2\lambda_1 \geqslant 0) = p(n|\text{部分属于}\{1,3\}).$$

提示: 建立一个双射得到 λ_1 个 3 和若干 1. (难度系数: 2)
47. 作为上题的一个小变形, 证明

$$p(n|\lambda_2+\lambda_1, \text{其中}\lambda_2 \geqslant 2\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \text{ 是偶数}) = p(n|\text{部分属于}\{2,3\}).$$

(难度系数: 2)
48. (接着是) 一个别具巧思的变形! 证明

$$p\left(n\middle|\lambda_2+\lambda_1, \text{其中}\frac{3}{2}\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant 0\right) = p(n|\text{部分属于}\{2,5\}).$$

(难度系数: 2)
49. 对部分属于 $\{2,3\}$, 找一个与上题类似的恒等式. (难度系数: 3)

4.2 发现第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式

这本书的第一个恒等式, Euler 恒等式, 显然是 (4.1) 类型的, 其中 N 是正奇数的集合, 左边的条件是部分相异.

在第 3 章的习题中, 我们将相异性这个条件推广到超相异和究极相异部分, 分别表示任意部分对的差至少为 2 和 3. (一旦差值再增长), 这个命名法可能就无可奈何了. (因此) 为了方便, 对给定正整数 d, 我们生造一个词语: d-**相异部分**, 表示部分之差至少是 d. 对特殊情况 $d=0$, 我们定义部分是 0-相异的, 当至多有两个部分具有同样给定的大小.

我们现在对 $n=1,2,\cdots,11$, 构造所有2-相异分拆的表格.

从表中我们可以尝试唯一地构造集合 N 满足 $p(n|\text{部分属于}N)=p(n|2\text{-相异部分})$, 非常像我们在第 2 章尝试构造 Euler 对的过程. 从令 $N:=\varnothing$ 开始.

1. 1 的 (此类) 分拆应当有一个, 用 $N=\varnothing$ 无法构造任何分拆, 所以 1 必须加入 N.

n	#	n 的 2-相异分拆
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	4,3 + 1
5	2	5,4 + 1
6	3	6,5 + 1,4 + 2
7	3	7,6 + 1,5 + 2
8	4	8,7 + 1,6 + 2,5 + 3
9	5	9,8 + 1,7 + 2,6 + 3,5 + 3 + 1
10	6	10,9 + 1,8 + 2,7 + 3,6 + 4,6 + 3 + 1
11	7	11,10 + 1,9 + 2,8 + 3,7 + 4,7 + 3 + 1,6 + 4 + 1

2. 2 的分拆应当有一个, 用 $N = \{1\}$ 中的部分可以构造一个, 即 $1 + 1$, 所以 2 不能加入 N.
3. 3 的分拆应当有一个, 用 $N = \{1\}$ 中的部分可以构造一个, 即 $1 + 1 + 1$, 所以 3 不能加入 N.
4. 4 的分拆应当有两个, 用 $N = \{1\}$ 中的部分只能构造一个, 即 $1 + 1 + 1 + 1$, 所以 4 必须加入 N.
5. 5 的分拆应当有两个, 用 $N = \{1, 4\}$ 中的部分可以构造两个 ($4 + 1$ 和 $1 + 1 + 1 + 1 + 1$), 所以 5不能加入 N.
6. 6 的分拆应当有三个, 用 $N = \{1, 4\}$ 中的部分只能构造两个 ($4 + 1 + 1$ 和 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), 所以 6 必须加入 N.
7. 7 的分拆应当有三个, 用 $N = \{1, 4, 6\}$ 中的部分可以构造三个 ($6+1, 4+1+1+1$ 和 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), 所以 7不能加入 N.
8. 8 的分拆应当有四个, 用 $N = \{1, 4, 6\}$ 中的部分可以构造四个 ($6 + 1 + 1, 4 + 4, 4 + 1 + 1 + 1 + 1$ 和 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), 所以 8不能加入 N.
9. 9 的分拆应当有五个, 用 $N = \{1, 4, 6\}$ 中的部分只能构造四个 ($6 + 1 + 1 + 1, 4 + 4 + 1, 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ 和 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), 所以 9 必须加入 N.

因此, 这一列可作为部分的数以 $1, 4, 6, 9$ 开始. 用相同的论证方法, 你可以发现这个数列接下去是 $11, 14, 16, 19, 21, 24, \cdots$. 通过给数列最后算出的两个数加上 5 我们总能得到两个属于该数列的新数. 这个数集因此可被描述为被 5 除余数为 1 或 4 的正整数的集合. 这样的数 m 被称为模 5 同余于 1 或 4, 用数学符号表示为

$$m \equiv 1 \text{ 或 } 4 (\text{mod } 5).$$

因此我们的研究促使我们猜想下述恒等式：

$$p(n|\text{部分} \equiv 1\text{或}4(\text{mod } 5)) = p(n|2\text{-相异部分}). \tag{4.2}$$

恒等式 (4.2) 就是我们在第 1 章章末提到的所谓的第一类 *Rogers-Ramanujan* 恒等式. 我们需要指出上面的论证并没有对任意 n 证明这个恒等式; 我们只是对其验证到了我们乐意去验证的整数. 除非给出一个对任意 n 通用的证明, 这个恒等式总是有可能对某个更大的 n 不成立.

不论如何, 上面的试验性方法是发现并猜测分拆恒等式的有力工具. 尽管这个方法可能没有被 Ramanujan使用过 (比起直接研究分拆, Ramanujan 对使用生成函数的方法感兴趣得多), 但几乎可以肯定的是 Schur用它发现了我们将在 4.4 节讨论的定理. 尽管对较小的 n, 手动计算是可行的, 但其实这个方法 (更) 适合计算机处理. 我们希望你试试用这个方法重识整数分拆理论中的一系列伟大结果.

习题:

50. 重新发现第二类 Rogers-Ramanujan 恒等式, 考虑分成大于等于 2 的 2-相异部分的分拆: 找到集合 N 满足 $p(n|\text{部分属于}N) = p(n|2\text{-相异部分, 部分} \geqslant 2)$. (难度系数: 1)
51. 重新发现第一类 Göllnitz-Gordon 恒等式, 考虑分成没有相继的 2 的倍数的 2-相异部分的分拆 (即, 如果 $2k$ 是一个部分, 那么 $2k+2$ 不是一个部分). (难度系数: 2)
52. 重新发现第二类 Göllnitz-Gordon 恒等式, 考虑分成没有相继的 2 的倍数的 2-相异部分且部分大于 3 的分拆. (难度系数: 2)
53. 重新发现 Schur 恒等式, 考虑分成没有相继的 3 的倍数的 3-相异部分的分拆. (难度系数: 2)
54. 重新发现 Gordon 恒等式, 考虑分成部分 $\geqslant 2$, 每个部分出现至多两次的分拆, 满足若一个部分恰出现两次, 则不出现大小相邻的部分. (难度系数: 2)
55. 重新发现 Andrews 恒等式, 考虑分成部分 $\geqslant 2$ 的分拆, 其中奇数部分相异且与比它小的部分至少大 3 的分拆. (难度系数: 2)

利用计算机搜寻恒等式的方法可以追溯到 20 世纪 60 年代晚期. 在一篇题为 *The use of computers in search of identities of the Rogers-Ramanujan type* (Andrews, 1971b)的文献中该方法的概要被首次呈现. 该文献最终是给出了一个全新版本的 Schur 定理. 随后 (Andrews, 1975), 这种搜寻技巧被进一步细化, 从而发现了更多的恒等式.

4.3 Alder 猜想

第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式考虑了模 5 同余于 1, 4 的部分. 但 4 模 5 同余于 -1, 这是因为 $-1+5=4$. 因此我们可以更加简洁地描述这类分拆为拥有模 5 同余于 ±1 的部分, 现在可以观察到一个引人注目的规律:

- 在第 2 章的习题 5 中, 分成不被 3 整除的部分的分拆数量等于每个部分出现至多两次的分拆数量. 如果一个整数不被 3 整除, 那么它除以 3 就必须余 1 或 2, 也就是同余于 ±1 的整数. 从而这个恒等式可以表示为

$$p(n|\text{部分}\equiv\pm1(\text{mod}3))=p(n|0\text{-相异部分}).$$

- 根据 Euler 恒等式, 奇分拆的数量等于相异分拆的数量. 一个整数是奇数当且仅当它模 4 同余于1, 3. 故 Euler 恒等式可以写作

$$p(n|\text{部分}\equiv\pm1(\text{mod}4))=p(n|1\text{-相异部分}).$$

- 第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式表示为

$$p(n|\text{部分}\equiv\pm1(\text{mod}5))=p(n|2\text{-相异部分}).$$

上述规律诱使我们猜想: 每一个非负整数 d 都能给出一个分成模$d+3$同余于±1的部分的分拆数量与 d-相异分拆数量之间的恒等式. 下一个需要检验的情况就是 $d=3$. 模 6 同余于±1的部分是 1, 5, 7, 11, 等等. 为方便起见 (我们) 将采用一种更简洁的记号, 其中每个部分出现的次数被标记在指数上, 从而 7+7+5+1+1+1+1 写作 $7^2 5^1 1^4$.

n	部分属于 $\{1,5,7,11,\cdots\}$	3-相异分拆
1	1^1	1
2	1^2	2
3	1^3	3
4	1^4	4
5	1^5,5^1	5,4 + 1
6	1^6,$5^1 1^1$	6,5 + 1
7	1^7,$5^1 1^2$,7^1	7,6 + 1,5 + 2
8	1^8,$5^1 1^3$,$7^1 1^1$	8,7 + 1,6 + 2
9	1^9,$5^1 1^4$,$7^1 1^2$	9,8 + 1,7 + 2,6 + 3

注意到 $n=9$ 时发生了什么吗? 有三个分成模6同余于±1的部分的分拆, 但却有四个3-相异分拆! 因此我们绝妙的猜想经不起仔细查验.

但或许我们只是错误地给出了部分模$d+3$同余于±1这个条件? 也许还存在着别的部分集合, 对 $d=0,1,2$ 的情况与部分模$d+3$同余于±1这个条件殊途同归.

(不过), 这点希望已经被证明是徒劳了. Lehmer 证明了对任意 $d \geqslant 3$, 都不存在一个集合 N 使 $p(n|d\text{-相异部分})$ 等于 $p(n|\text{部分属于}N)$ 对所有 $n > 0$ 都成立. Alder 将原来猜想的等式放宽为不等式:

$$p(n|\text{部分} \equiv \pm 1(\text{mod } d+3)) \leqslant p(n|d\text{-相异部分}) \quad \text{对任意} n, d \geqslant 0.$$

对 d 取 2 的幂减 1 的那些值 (除了 7), Andrews (1971a)证明了这个不等式总成立. 撇开这个特殊情况, Alder 猜想的不等式今天仍然是一个公开问题①; 既没有被证明也没有被证伪. 这些数字的表格似乎暗示着: 对 $n \geqslant d+6 \geqslant 14$, 这个不等式是严格的. (即, "$\leqslant$" 可以被替换为 "$<$")

习题:

56. 对 $d = 3$ 和 $d = 4$ 证明 Lehmer 的结果: 尝试去构造集合 N, 并证明这样的尝试必然失败. (难度系数: 2)
57. 你想要找到哪种分拆变换用于证明 Alder 猜想? (难度系数: 2)
58. 写一个计算机程序计算下列差值

$$p(n|d\text{-相异部分}) - p(n|\text{部分} \equiv \pm 1(\text{mod } d+3)),$$

尝试观察所得数据的某种规律, 并据此提出一个属于你自己的修正版猜想! (难度系数: 3)

4.4 Schur 定理

(尽管) 受到了第一次世界大战的阻隔而错过了数学在英国的发展, Schur 在德国对分拆理论独立进行了开创性研究. Schur 不仅发现并证明了 Rogers-Ramanujan 恒等式, 还在 1926 年找到了一个正确的方式修改 $d = 3$ 时的错误猜想. (该方式的)关键之处是别去妄动部分为模6同余于±1这个条件, 而是转为排除 3-相异分拆中的某个特定子集.

定理 5 对任意正整数 n, 分成部分 $\equiv \pm 1 \pmod 6$ 的分拆数量等于不含连续 3 的倍数的 3-相异分拆数量②.

这个定理揭示出为什么错误的猜想

$$p(n|\text{部分} \equiv \pm 1(\text{mod } 6)) = p(n|3\text{-相异部分}),$$

①译注: 该猜想已经于 2011 年被 Alfes 等人完全证明了, 详见参考文献 (Alfes et al., 2011).

②译注: 为避免歧义, 对该条件的另一种理解是若相邻两个部分均为 3 的倍数, 则它们至少差 6.

直到 $n=9$ 才出错; 因为 9 是第一个可以分为连续的 3 的倍数的数字, 即 $6+3$.

为了证明这个定理, Schur 首先意识到左边的表达式可以重写为

$$p(n|\text{部分} \equiv \pm 1 (\text{mod } 6)) = p(n|\text{相异部分} \equiv \pm 1 (\text{mod } 3)), \tag{4.3}$$

因为正整数集 $\{1,5,7,11,\cdots\}$ 和 $\{1,2,4,5,7,8,10,11,\cdots\}$ 组成了一个 Euler 对. (为什么? 见习题 59.) 接下来对该等式右边的表达式等于 $p(n|3\text{-相异部分}$, 没有连续的 3 的倍数), Schur 给出了一个相当复杂的证明. 从那以后, 几个各不相同的证明被多位数学家找到, 其中就有 Bressoud找到的下面这个聪明绝顶的双射.

我们从一个分成模3同余于±1相异部分的分拆 P 出发, 从最小的部分开始依次将差值至多为 2 的相邻部分成对合并, 把 P 变换成一个新的分拆 P_1. 将部分排成列更为方便 (理解这个变换). 举个例子,

$$P=\begin{matrix}11\\10\\8\\5\\2\\1\end{matrix} \quad \mapsto \quad P_1=\begin{matrix}11\\10+8\\5\\2+1\end{matrix}.$$

合并的对其和总是 3 的倍数并且这种 (合并) 方式不可能产生连续的 3 的倍数. (为什么?) 事实上, 如果列中两个 3 的倍数之间有 i 个数, 那么这两个 3 的倍数至少差 $(2+i)3$. (为什么?)

接着我们从 P_1 的部分中减去连续的 3 的倍数, 从最底部的部分处减去 0, 然后向上继续. 我们在旁边新的一列中保留这些 3 的倍数.

$$P_1=\begin{matrix}11\\10+8\\5\\2+1\end{matrix} \quad \mapsto \quad P_2=\begin{matrix}11-9 & 9\\10+8-6 & 6\\5-2 & 3\\2+1-0 & 0\end{matrix}.$$

现在我们用降序重排 P_2 中的第一列.

$$P_2=\begin{matrix}11-9=2 & 9\\10+8-6=12 & 6\\5-3=2 & 3\\2+1-0=3 & 0\end{matrix} \quad \mapsto \quad P_3=\begin{matrix}12 & 9\\3 & 6\\2 & 3\\0 & 0\end{matrix}.$$

最后我们把 P_3 的每一行加起来.

$$P_3=\begin{array}{cc}12 & 9\\ 3 & 6\\ 2 & 3\\ 2 & 0\end{array}\qquad\mapsto\qquad P_4=\begin{array}{c}21\\ 9\\ 5\\ 2\end{array}.$$

最后一步变换总是给出一个不含连续 3 的倍数的 3-相异分拆 P_4. (为什么?) 因此我们描述了四个简单的变换, 由它们所复合成的变换将部分为模 3 同余于±1的相异分拆 P 变为不含连续 3 的倍数的 3-相异分拆 P_4, 并且根据稍后的讨论, 这个复合变换还是可逆的. 故这是证明 Schur 定理的双射.

这个双射从上述方向描述是非常容易的. 然而, 描述该双射在逆方向上如何操作是颇为吃力的. 我们将可逆性的证明作为一系列的习题留给雄心满满的读者.

习题:

59. 证明 $N=\{1,5,7,11,\cdots\}$ 和 $M=\{1,2,4,5,7,8,10,11,\cdots\}$ 组成 Euler 对. (难度系数: 2)

60. 验证从 P_1 到 P_4 的变换等价于下面的数字游戏: 只要存在某个部分不比它下方的部分至少多 3, 就把这个部分减 3, 把它下方的部分加 3, 并且互换两个部分的位置. 明显地, 这个游戏最终得到一个递减的 3-相异分拆. 举个例子,

$$P_1=\begin{array}{c}\underline{11}\\ 18\\ 5\\ 3\end{array}\quad\mapsto\quad\begin{array}{c}18+3=21\\ 11-3=8\\ \underline{5}\\ 3\end{array}\quad\mapsto\quad\begin{array}{c}21\\ \underline{8}\\ 3+3=6\\ 5-3=2\end{array}.$$

$$\mapsto\quad\begin{array}{c}21\\ 6+3=9\\ 8-3=5\\ 2\end{array}=P_4$$

(难度系数: 2)

61. 根据下面规则, 解释为什么上述游戏是可逆的: 首先将 P_4 中 3 的倍数分成差至多为 2 的一对部分.

$$P_4=\begin{array}{c}21\\ 9\\ 5\\ 2\end{array}\quad\mapsto\quad P_4'=\begin{array}{c}11,10\\ 5,4\\ 5\\ 2\end{array}.$$

这样得到了一个不含 3 的倍数的分拆. 现在, 只要某个部分对中较小的部分小于其下方的部分加 3, 就从该部分对中的较大者减 3, 给下方的部分加 3 并交换它们的位置. 明显地, 这个游戏最终得到一个不含 3 的倍数的分拆, 其中从最小的部分开始, 相差不超过 2 的部分两两配对.

$$P_3 = \begin{matrix} 12 & 9 \\ 3 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} \quad \mapsto \quad P_4 = \begin{matrix} 21 \\ 9 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}.$$

(难度系数: 3)

62. 结合你自己的理解, 解释一下为什么每个不含连续 3 的倍数的 3-相异分拆, 且没有其他分拆, 可以从模 3 同余于±1的相异分拆通过复合变换得到. (难度系数: 2)

既然看起来似乎有这么多意想不到的分拆恒等式, 人们自然也会期望去寻找更多类似 Schur 定理的恒等式, 比如说, 将 "不含连续 3 的倍数的 3-相异部分" 变成 "不含连续 2 的倍数的 2-相异部分". 的确, Göllnitz 和 Gordon 各自独立发现的一个定理表明, 满足这种条件的分拆数量等于分成模8同余于$1, 4, 7$的部分的分拆数量.

然而明显的推广并不存在. Alder 证明了对 $d > 3$, 不可能找到一个集合 N 使得

$$p(n|d\text{-相异部分, 不含连续的 } d \text{ 的倍数}) = p(n|\text{部分属于}N)$$

对任意 $n > 0$ 成立.

习题:

63. 对 $d = 1$, 实际上有一个集合 N 满足 Alder 的标准, 是哪一个? (难度系数: 2)
64. 对 $d = 4$, 通过去构造集合 N 并证明这种尝试必然失败, 进而证明 Alder 的结果. (难度系数: 1)

4.5 寻找 Rogers-Ramanujan 恒等式的双射证明

我们现在已经看过很多恒等式的双射证明. 两个分拆集合之间的双射自动给出了分拆恒等式, 但反过来的情况却差得很远: 给一个分拆恒等式, 并没有一个按部就班的程序来构造双射. 这本书中先前展示的双射有种种类型, 比如共轭、分

裂/合并、移动 Ferrers 图的对角线, (将部分) 分为两列重组并调整其内部顺序, 等等.

为了让读者体验一下给已知为真的分拆恒等式寻找双射证明的难度, 让我们试试攻克第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式. 下面表格展示了: 对 $n = 1, 2, \cdots, 10$, 恒等式所表明的两类等大小的集合.

n	部分属于 $\{1, 4, 6, 9, 11, \cdots\}$	2-相异分拆
1	1^1	1
2	1^2	2
3	1^3	3
4	1^4,4^1	4,3 + 1
5	1^5,$4^1 1^1$	5,4 + 1
6	1^6,$4^1 1^2$,6^1	6,5 + 1,4 + 2
7	1^7,$4^1 1^3$,$6^1 1^1$	7,6 + 1,5 + 2
8	1^8,$4^1 1^4$,$6^1 1^2$,4^2	8,7 + 1,6 + 2,5 + 3
9	1^9,$4^1 1^5$,$6^1 1^3$,$4^2 1^1$,9^1	9,8 + 1,7 + 2,6 + 3,5 + 3 + 1
10	$1^1 0$,$4^1 1^6$,$6^1 1^4$,$4^2 1^2$,$9^1 1^1$,$6^1 4^1$	10,9 + 1,8 + 2,7 + 3,6 + 3 + 1,6 + 4

为了给表添加新的一行, 我们从原表最后一行中取出每个分拆, 给左边那些分拆各自加上一个 1-部分, 而给右边的最大部分都加上 1. 明显地, 新分拆满足各自的条件. 然后我们要在左边添加部分只取 $4, 6, 9, 11, \cdots$ 的分拆, 在右边添加最大的两个部分差恰好为 2 的分拆.

这似乎是 (构造) 双射的一个满怀希望的开端! 我们现在懂得如何来处理左边分拆中的 1-部分 —— 它们应该全部被合并起来, 然后加到变换剩下部分所得 2-相异分拆中的最大部分上去, 其中 2-相异分拆的最大两个部分恰好差 2.

接下来我们得看看如何变换剩下的部分. 从上表中看出, 我们必须有

$$
\begin{aligned}
4 &\mapsto 3+1 \\
6 &\mapsto 4+2 \\
9 &\mapsto 5+3+1. \\
4^2 &\mapsto 5+3 \\
6^1 4^1 &\mapsto 6+4
\end{aligned}
$$

显然, 4-部分不能全被变换为 $3+1$, 因为那样的话 4^2 应当被映射到 $6+2$. 取而代之的 (规则) 似乎应该是: 4^2 中的第二个 4 和 $6^1 4^1$ 中的 4 被映射到了 $2+2$. 好吧, 那我们为单独一个 4 引入特殊规则; 剩余的 4 都被映射到 $2+2$. 我们现在可以将表格扩充几行, 同时继续推断部分的变换应当遵循的规则.

无数的数学家从这种方式出发, 去寻找第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式的双射证明. 刚开始看起来很有希望, 然而到后来, 越来越多的特殊规则不得不被添加到变换程序中, 以至于整个双射最后看起来一点儿也不简明易懂了, 就只得放弃了.

为第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式给出双射解释的困难早已被数学家中的伟大漫游者 Paul Erdös 察觉了. 他不仅仅是 20 世纪最重要的数学问题解答者, 也热衷于给其他同行提出问题去攻克. 根据他对难度的判断, Paul Erdös 给问题标价 —— 从 10 美元到 3000 美元不等 —— 悬赏奖金给发表的解答. 其中一些问题在 Erdös 有生之年解决了; 1996 年, 他在 83 岁时去世. 至于遗留的公开问题, 同行数学家并且是 Erdös 终身挚友的 Ron Graham和 Fan Chung, 以及业余数学家、银行家 Andrew Beal会 (继续) 提供赏金.

为了得到第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式的双射证明, Andrews(模仿 Erdös) 悬赏了 50 美元. 多数时候, 这都是以 Andrews 为他抛出的挑战买单而告终, 这个问题也不例外. 然而, 发表的解答不是我们在这本书中看到过的许多例子那样容易描述的双射. 这份解答发表在 Adriano Garsia和 Stephen Milne一篇长达 50 页的论文中. 该文中他们发明了一种新的方法—— 对合原理 —— 来迭代地构造双射. David Bressoud和 Doron Zeilberger运用了同样的思想且成功地将证明压缩到了两页! 尽管如此, 是否存在一个直接的双射解释第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式, 这仍旧是一个令人激动的公开问题.

正如我们已经多次提到过的, 这些经典分拆恒等式的最初发现者 ——Euler, Rogers, Ramanujan, Schur—— 使用的是不同于双射的证明方法. 但是在你无法展示出它们之间双射对应的时候, 如何能得出一个分拆集合与另一个分拆集合一样大的结论呢? 我们将会在下一章看到.

习题:

65. 继续上述寻找 Rogers-Ramanujan 恒等式的双射的尝试, 将表补充到 $n = 20$. (难度系数：1)
66. 找到一个完全双射的证明! (难度系数：>3)

4.6 Rogers-Ramanujan 恒等式的影响

当我们将自己局限于 Rogers-Ramanujan 恒等式和其他分拆恒等式的内在价值时, 难免会坐井观天地误以为它们的价值仅限于此. B. McCoy(与 A. Berkovich 合作的论文 (Berkovich and McCoy, 1998)) 在国际数学家大会报告中综述了分拆恒等式在物理学中的应用. 不仅如此, 分拆恒等式和其他组合模型间卓有成效的互动也被 K. Alladi(1995) 漂亮地概括出来. 以此为前兆的是 K. Alladi 等 (2003) 发现的深刻而又难以置信的进一步结论.

第5章 生成函数

在前四章中，我们向你介绍了纯粹算术和组合的分拆研究方法. 第 2 章，我们回顾了 Leonhard Euler 在 18 世纪的一些发现. 然而除了结果，在那一章中使用的方法都不是 Euler 所使用的.

事实上，Euler 处理分拆问题最主要的方法是利用生成函数，而这正是这一章的主题.

本章的重要内容

- 生成函数是为了记录数字序列而构造的幂级数.
- 我们可以利用生成函数从另一种角度陈述并证明第 2 章的 Euler 定理.
- 通过用生成函数重新陈述 Euler 五角数定理，我们得到了分拆函数 $p(n)$ 的递归关系.
- Rogers-Ramanujan 恒等式也可以用生成函数重新陈述.

5.1 乘积形式的生成函数

这里最原始的思想基于熟悉的幂乘积法则，即

$$q^r \cdot q^s = q^{r+s}.$$

下面，我们将使用这个基本的运算法则. 假设我们想要展示出所有分成一个偶数部分和一个奇数部分且都小于 7 的分拆. 我们可以将它们逐一写出来 (共有九个)；然而，我们还注意到它们自然地由下面的多项式乘法生成：

$$\begin{aligned}
&(q^2+q^4+q^6)(q^1+q^3+q^5)\\
=&q^{2+1}+q^{2+3}+q^{2+5}+q^{4+1}+q^{4+3}+q^{4+5}+q^{6+1}+q^{6+3}+q^{6+5}\\
=&q^3+2q^5+3q^7+2q^9+q^{11}.
\end{aligned}\tag{5.1}$$

注意到第二行在指数部分清楚地展示了所有分成一个偶数部分和一个奇数部分且都小于 7 的分拆，并且这个事实可以通过式 (5.1) 和多项式乘法法则直接解释.

习题:

67. 通过计算多项式乘法

$$(q^1+q^3+q^5+q^7)(q^2+q^4+q^6+q^8)$$

找到 q^9 的系数, 进而得到 9 分成一个奇数部分和一个偶数部分的分拆数量. (难度系数: 1)

68. 你能更直接地看出习题 67 的答案吗? 10 和 11 的这种分拆数量各是多少? (难度系数: 1)

69. 什么多项式 $a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_rq^r$ 满足性质: 对任意正整数 n, $a_n = p(n|$两个部分, 一个 $\leqslant 100$, 另一个介于 101 到 200 之间). 用较为巧妙的方法来描述它. (难度系数: 1)

这个简单的想法很容易被扩展到更加一般的分拆问题上. 譬如说, 假设 $S=\{n_1,\cdots,n_r\}$ 是 r 个正整数的有限集. 当 $r=3$ 时, 我们看到

$$\begin{aligned}&(1+q^{n_1})(1+q^{n_2})(1+q^{n_3})\\=&1+q^{n_1}+q^{n_2}+q^{n_3}+q^{n_1+n_2}+q^{n_1+n_3}+q^{n_2+n_3}+q^{n_1+n_2+n_3}\end{aligned} \tag{5.2}$$

在指数上展示了所有使用 $\{n_1,n_2,n_3\}$ 中相异元素的分拆.

说得更明白一点, 如果 $S=\{1,2,3\}$, 那么式 (5.2) 中多项式是

$$1+q^1+q^2+2q^3+q^4+q^5+q^6. \tag{5.3}$$

这个函数 (例中为多项式) 被称为 $\{1,2,3\}$ 构成的相异分拆的生成函数; q^n 的系数便是 n 的这种分拆的数量. 因此式 (5.3) 中 q^3 的系数是 2, 对应了由 $\{1,2,3\}$ 构成的 3 的相异分拆有两个 (3 和 $2+1$) 这项事实.

正是这样一个推导过程让我们得出结论: 如果 $S=\{n_1,n_2,\cdots,n_r\}$,

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n|S\text{中的相异部分})q^n=\prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i})=\prod_{n\in S}(1+q^n). \tag{5.4}$$

现在假设我们允许每个部分重复至多 d 次. 比如说 $d=3$, $S=\{n_1,n_2\}$,

$$
\begin{aligned}
&(1+q^{n_1}+q^{n_1+n_1}+q^{n_1+n_1+n_1})(1+q^{n_2}+q^{n_2+n_2}+q^{n_2+n_2+n_2})\\
=&1+q^{n_2}+q^{n_2+n_2}+q^{n_2+n_2+n_2}+q^{n_1}+q^{n_1+n_2}+q^{n_1+n_2+n_2}\\
&+q^{n_1+n_2+n_2+n_2}+q^{n_1+n_1}+q^{n_1+n_1+n_2}+q^{n_1+n_1+n_2+n_2}\\
&+q^{n_1+n_1+n_2+n_2+n_2}+q^{n_1+n_1+n_1}+q^{n_1+n_1+n_1+n_2}+q^{n_1+n_1+n_1+n_2+n_2}\\
&+q^{n_1+n_1+n_1+n_2+n_2+n_2}\\
=&\sum_{n\geqslant 0}p(n|\text{部分属于}\{n_1,n_2\},\ \text{部分重复不超过 3 次})q^n.
\end{aligned}
$$

一般地, 如果 $S=\{n_1,n_2,\cdots,n_r\}$, 那么

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 0}p(n|\text{部分属于 } S,\ \text{部分重复不超过 } d \text{ 次})q^n\\
=&\prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}+q^{n_i+n_i}+\cdots+q^{\overbrace{n_i+n_i+\cdots+n_i}^{d\text{ 项}}})\\
=&\prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}+q^{2n_i}+\cdots+q^{dn_i})\\
=&\prod_{i=1}^{r}\frac{(1-q^{(d+1)n_i})}{(1-q^{n_i})}=\prod_{n\in S}\frac{1-q^{(d+1)n}}{1-q^n},
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

其中式 (5.5) 的最后一行是利用了有限项几何级数求和公式得到

$$
\sum_{j=0}^{N}x_j=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}. \tag{5.6}
$$

当然, 我们也许会想让部分出现任意多次 (即: 令 $d\to\infty$). 只要我们要求 $|q|<1$(这对我们是没问题的, 因为我们只用 q 做记录, 并未涉及它本身的取值), 式 (5.5) 中的推导过程依然有效. 因此, 对 $|q|<1$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}p(n|\text{部分属于 } S)q^n=&\prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}+q^{2n_i}+q^{3n_i}+\cdots)\\
=&\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-q^{n_i}}=\prod_{n\in S}\frac{1}{1-q^n},
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

其中我们调用了几何级数求和公式

$$
\sum_{j=0}^{\infty}x^j=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1.
$$

r 个几何级数的乘法是完全合理的, 因为有限个绝对收敛级数的乘积依旧是一个绝对收敛级数.

习题:

70. 把 n 美分分成若干 5 美分、10 美分和 25 美分硬币的方法数的生成函数为什么是

$$\frac{1}{(1-q^5)(1-q^{10})(1-q^{25})}?$$

如果我们同时允许便士和美元的使用, 怎么修改这个生成函数? (难度系数: 1)

接下来我们考虑 S 是一个无限正整数集. 注意到式 (5.4), (5.5) 和 (5.7) 的两端都没有使用 S 的有限性. 因此我们希望当 S 是无限集时, 仍然有同样的公式. 换句话说, 对任意正整数集合 S,

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n|\text{属于 } S \text{ 的相异部分})q^n = \prod_{n\in S}(1+q^n),$$

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n|\text{部分属于 } S, \text{部分重复不超过 } d \text{ 次})q^n = \prod_{n\in S}\frac{(1-q^{(d+1)n})}{(1-q^n)},$$

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n|\text{部分属于 } S)q^n = \prod_{n\in S}\frac{1}{1-q^n}, \quad |q|<1.$$

证明这些恒等式的确成立将被留作下面的作业. 它们形式上的合理性从式 (5.4), (5.5) 和 (5.7) 来看是明显的. 关于无穷乘积的收敛性质, 可以参考附录 A.

习题:

71. 在接下来的习题中, S 是一个按增序排列的无限正整数集合:

$$S = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots\},$$

$$S_m = \{n_1, n_2, \cdots, n_m\}.$$

证明 $p(n|\text{部分属于 } S_m) \leqslant p(n|\text{部分属于 } S)$. (难度系数: 1)

72. 证明对 $n \leqslant n_m$, $p(n|\text{部分属于 } S_m) = p(n|\text{部分属于 } S)$. (难度系数: 1)

73. 证明

$$\lim_{m\to\infty} p(n|\text{部分属于 } S_m) = p(n|\text{部分属于 } S).$$

(难度系数：1)

74. 证明：如果

$$\mathcal{P}_m(q)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n|\text{部分属于 }S_m)q^n=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-q^{n_i}},$$

那么

$$\mathcal{P}_m(q)=\sum_{n=0}^{n_m}p(n|\text{部分属于 }S)q^n+\prod_{n=n_m+1}^{\infty}p(n|\text{部分属于 }S_m)q^n.$$

(难度系数：1)

75. 证明: 对实数 $0<q<1$,

$$\mathcal{P}(q)=\prod_{n\in S}\frac{1}{1-q^n}$$

是一个绝对收敛无穷乘积. (请看附录 A, 事实 2.) (难度系数：2)

76. 证明

$$\sum_{n=0}^{n_m}p(n|\text{部分属于 }S)q^n<\mathcal{P}_m(q)<\mathcal{P}(q).$$

(难度系数：2)

77. 证明: 对实数 $0<q<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n|\text{部分属于 }S)q^n=\mathcal{P}(q).$$

(难度系数：2)

5.2 Euler 定理

在第 2 章中, 我们证明了 Euler 定理:

$$p(n|\text{部分为奇数})=p(n|\text{部分相异}). \tag{5.8}$$

让我们考虑相关的生成函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n|\text{部分相异})q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) \qquad (\text{根据式(5.4)}),$$

以及

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n|\text{部分为奇数})q^n = \prod_{n\text{为奇数}} \frac{1}{(1-q^n)}.$$

现在显然有

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)\\
=&(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)(1+q^6)\cdots\\
=&\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^4}{1-q^2}\right)\left(\frac{1-q^6}{1-q^3}\right)\left(\frac{1-q^8}{1-q^4}\right)\left(\frac{1-q^{10}}{1-q^5}\right)\left(\frac{1-q^{12}}{1-q^6}\right)\cdots\\
=&\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} \qquad (\text{从分子分母中消去公共因子})\\
=&\prod_{n\text{为奇数}}\frac{1}{1-q^n}.
\end{aligned}$$

可见生成函数是相同的; 所以对每个 $n \geqslant 0$, 等式 (5.8) 均成立.

对乘积进行代数操作可被用于证明许多类似式 (5.8) 的定理.

举个例子, 让我们来证明

$$p(n|\text{每个 } i\text{-部分出现} < i \text{ 次}) = p(n|\text{部分非完全平方数}).$$

让我们看一个例子. 对 $n=9$, 有五个分拆是第一种类型的 (9, $7+2$, $6+3$, $5+4$, $4+3+2$), 且也有五个第二种类型的分拆 ($7+2$, $6+3$, $5+2+2$, $3+3+3$, $3+2+2+2$).

这个证明仿照了我们刚刚给出的对 (5.8) 的证明.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 0} p(n|\text{每个 } i\text{-部分出现} < i \text{ 次})q^n\\
=&\prod_{i=1}^{\infty}(1+q^i+q^{2i}+q^{3i}+\cdots+q^{(i-1)i})\\
=&\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(1-q^{i^2})}{(1-q^i)} \qquad (\text{根据式 (5.6)})\\
=&\prod_{n\text{非完全平方数}}\frac{1}{1-q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n|\text{部分非完全平方数})q^n.
\end{aligned}$$

习题:

78. (Subbarao, 1971b) 证明 n 分成每个部分恰好出现 $2, 3, 5$ 次的分拆数量等于 n 分成模12同余于$\pm 2, \pm 3, 6$的部分的分拆数量. (难度系数: 2)
79. (MacMahon, 1916)证明 n 分成没有部分出现恰好一次的分拆数量等于 n 分成模 6 不同余于 ± 1 的部分的分拆数量. (难度系数: 3)

5.3 二元生成函数

有时候我们不仅仅需要记录被分拆的数. 在许多情况, 我们希望生成函数还能提供分拆的部分数量.

让我们回到式 (5.2) 的例子中; 不过, 我们现在要插入第二个变量 z, 它的指数计数了每个分拆中有多少个部分:

$$\begin{aligned}&(1+zq^{n_1})(1+zq^{n_2})(1+zq^{n_3})\\=&1+zq^{n_1}+zq^{n_2}+zq^{n_3}+z^2q^{n_1+n_2}\\&+z^2q^{n_1+n_3}+z^2q^{n_2+n_3}+z^3q^{n_1+n_2+n_3}.\end{aligned}$$

这个例子清楚地引导我们得到下面关于式 (5.4), (5.5) 和 (5.7) 的二元类比, 按照与只有一个变元时相同的方法:

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 0}p(n|\text{属于 } S \text{ 的 } m \text{ 个相异部分})z^mq^n=\prod_{n\in S}(1+zq^n),$$

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 0}p(n|\text{属于 } S \text{ 的 } m \text{ 个部分, 每个部分重复} \leqslant d \text{ 次})z^mq^n \tag{5.9}$$

$$=\prod_{n\in S}\frac{(1-z^{d+1}q^{(d+1)n})}{1-zq^n}, \tag{5.10}$$

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 0}p(n|\text{属于 } S \text{ 的 } m \text{ 个部分})z^mq^n=\prod_{n\in S}\frac{1}{1-zq^n}. \tag{5.11}$$

如果 S 是无限集, 那么在式 (5.9), (5.10) 和 (5.11) 中, 我们必须要求$|q|<1$, 并且在式 (5.11) 中我们还必须要求 $|z|<\dfrac{1}{|q|}$.

5.4　Euler 五角数定理

在第 3 章, 我们证明了:

$$\begin{aligned}&p(n|\text{部分相异, 偶数个部分}) - p(n|\text{部分相异, 奇数个部分})\\&=\begin{cases}(-1)^j, & n = j(3j\pm 1)/2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned} \tag{5.12}$$

我们容易把上述结论用式 (5.9) 翻译成关于生成函数的等式. 具体来说, 若我们在式 (5.9) 中令 $z=-1$, 那么左边所得 q^n 的系数就刚好是式 (5.12) 的左边. 因此, 根据式 (5.9),

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(p(n|\text{部分相异, 偶数个部分}) - p(n|\text{部分相异, 奇数个部分}))q^n\\&=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j+1)/2}\\&=1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}(1+q^j)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

现在 (我们要说) 式 (5.13) 是一个极其有用的恒等式, 这在于它给我们提供了一个特别快速的算法用于计算 $p(n)$, n 的所有分拆总数. 即, 根据式 (5.7),

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^m)}.$$

因此,

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n=1;$$

故利用式 (5.13),

$$\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}(1+q^j)\right)\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n=1. \tag{5.14}$$

对 $n>0$, 比较式 (5.14) 两边 q^n 的系数, 我们得到

$$\begin{aligned}&p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)\\&-\cdots+(-1)^j p\left(n-\frac{j(3j-1)}{2}\right)+(-1)^j p\left(n-\frac{j(3j+1)}{2}\right)\\&+\cdots=0.\end{aligned} \tag{5.15}$$

如果你熟悉计算机编程, 你会发现式 (5.15) 提供了一个非常高效的算法计算 $p(n)$. 事实上, $p(n)$ 可以在与 $n^{\frac{3}{2}}$ 成比例的时间里被计算出来. 因此,

$$\begin{aligned}&p(0)=1,\\&p(1)=p(0)=1,\\&p(2)=p(1)+p(0)=2,\\&p(3)=p(2)+p(1)=3,\\&p(4)=p(3)+p(2)=5,\\&p(5)=p(4)+p(3)-p(0)=7,\\&p(6)=p(5)+p(4)-p(1)=11,\\&p(7)=p(6)+p(5)-p(2)-p(0)=15,\end{aligned}$$

等等.

5.5 $p(n)$ 的同余性质

当 Hardy 和 Ramanujan 研究 $p(n)$ 时 (在下一章讨论), 他们发现需要一张 $p(n)$ 的数值表用来检验他们的工作. P. A. MacMahon 提供了他们的所需, 他制作了当 n 从 1 到 200 时 $p(n)$ 的数值表. 为了增强表的可读性, 他将数值项依照下面的格式编为五个一组.

Ramanujan(“钟情于数字的人”, Kanigel (2015)) 注意到了一些可能会被我们大家所忽略的东西. 即, 每一组的最后一个 $p(n)$ 项都是 5 的倍数. 所以他猜想

$$p(5n+4)\equiv 0(\bmod 5).$$

既然有可能存在这般出乎意料的规律, 他随后尝试了别的等差数列, 很快他又增列了如下猜想:

$$\begin{aligned}p(7n+5)&\equiv 0(\bmod 7),\\p(11n+6)&\equiv 0(\bmod 11).\end{aligned}$$

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
0	1	10	42	20	627
1	1	11	56	21	792
2	2	12	77	22	1002
3	3	13	101	23	1255
4	5	14	135	24	1575
5	7	15	176	25	1958
6	11	16	231	26	2436
7	15	17	297	27	3010
8	22	18	385	28	3718
9	30	19	490	29	4565

最终他证明了这些猜想. 更一般地, 他对任意形如 $5^\alpha 7^\beta 11^\gamma$ 的模提出了相应的猜想. 许多人研究过这个问题, 最后被 G. N. Watson 和A. O. L. Atkin 所解决; 后者的工作在 1969 年完成.

习题:

80. 证明

$$p(n|\text{部分为奇数}) \equiv 0 \pmod 2$$

除了当 $n = j(3j \pm 1)/2$ 时. (难度系数: 2)

5.6　重温 Rogers-Ramanujan 恒等式

在第 4 章, 我们介绍了 Rogers-Ramanujan 恒等式. 基于这章中我们已经做的工作, 我们立刻看到分成模 5 同余于±1 的部分的分拆生成函数是

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})},$$

而分成模 5 同余于±2的部分的分拆生成函数是

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})}.$$

但是要怎么处理超相异分拆, 即部分之差至少是 2 的分拆呢? 假设 $r_1+r_2+\cdots+r_m$ 是这样的分拆, 即 $1\leqslant r_1\leqslant r_2-2$, $r_2\leqslant r_3-2$, 等等. 然后我们唯一地取定 $0\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_m$ 为

$$\begin{aligned}r_1&=n_1+1,\\r_2&=n_2+3,\\r_3&=n_3+5,\\&\vdots\\r_m&=n_m+2m-1.\end{aligned}$$

因此对任意有 m 个正部分的 n 的超相异分拆, 有一个对应的分拆将 $n-(1+3+\cdots+(2m-1))=n-m^2$ 分成 m 个非负部分 (或者等价地至多 m 个正部分). 因此, 有 m 个正部分的超相异分拆的生成函数是

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_m}q^{(1+n_1)+(3+n_2)+\cdots+(2m-1)+n_m}\\&=q^{m^2}\sum_{0\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_m}q^{n_1+n_2+\cdots+n_m}\\&=q^{m^2}\sum_{0\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_{m-1}}q^{n_1+\cdots+n_{m-1}}\frac{q^{n_{m-1}}}{1-q}\\&=\frac{q^{m^2}}{(1-q)}\sum_{0\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_{m-2}}q^{n_1+\cdots+n_{m-2}}\frac{q^{2n_{m-2}}}{1-q^2}\\&=\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)}\sum_{0\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_{m-3}}q^{n_1+\cdots+n_{m-3}}\frac{q^{3n_{m-3}}}{1-q^3}\\&\ \ \vdots\\&=\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)},\quad |q|<1.\end{aligned}\tag{5.16}$$

如果我们把式 (5.16) 对所有 $m\geqslant 0$ 求和, 我们将得到所有超相异分拆的生成函数, 即

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

因此, 第 4 章的 Rogers-Ramanujan 恒等式意味着有

$$
\begin{aligned}
&1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})},\quad |q|<1.
\end{aligned}
$$

如果我们不允许出现 1-部分, 重新考察上述论证过程, 我们看到现在要取 n_1, $n_2,\cdots,n_m$ 为

$$
\begin{aligned}
r_1&=n_1+2,\\
r_2&=n_2+4,\\
r_3&=n_3+6,\\
&\vdots\\
r_m&=n_m+2m.
\end{aligned}
$$

因此在这种情况下, 生成函数是

$$
1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2+m}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}
$$

因为 $m^2+m=2+4+6+\cdots+2m$.

因此, 第二类 Rogers-Ramanujan 恒等式意味着有

$$
\begin{aligned}
&1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2+m}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})},\quad |q|<1. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

我们将在第 8 章给出两类 Rogers-Ramanujan 恒等式的完整证明.

第 6 章　分拆函数公式

在第 2 章, 我们注意到, 如果我们有分拆函数的公式, 那么有些分拆问题可以轻松解决. (所以) 在这一章, 我们将要引入一个初等方法用来找一些分拆函数的公式. 我们真的只会探索它的冰山一角, 你将多少感受一下为什么这个课题可以变得相当复杂.

本章的重要内容

- 对于 $m=1,2,3,4$, 通过研究生成函数得到了 $p(n,m)$ 的公式, 这函数代表把 n 分成部分不超过 m 的分拆数量.
- 当 n 趋于无穷, $p(n)^{1/n}$ 趋于 1.

6.1　$p(n,1)$ 和 $p(n,2)$ 的公式

我们的讨论重点是 $p(n,m)$, n 分成部分 $\leqslant m$ 的分拆数量. 沿用我们之前的记号,

$$p(n,m)=p(n|\text{部分属于}\{1,2,\cdots,m\}). \tag{6.1}$$

我们马上看到, 给定 n, 恰好只有一个只分成 1 的 n 的分拆. 故

$$p(n,1)=1.$$

获得 $p(n,2)$ 的公式也不会 (比这个) 困难太多. 任何将 n 分成 1 和 2 的分拆由使用多少个 2 所唯一决定, 因为一旦你知道 2 的数量, 剩下的部分只能是 1. 所以对于任意 ν 满足 $0\leqslant\nu\leqslant\dfrac{n}{2}$, 都存在唯一的 n 的分拆分成 ν 个 2 和 $n-2\nu$ 个 1. 换句话说,

$$p(n,2)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,$$

其中 $\lfloor x\rfloor$ 是不超过 x 的最大整数.

你可以试着把同样想法用在 $p(n,3)$ 上, 但情况就变得有些棘手了. 我们用在 $p(n,2)$ 上的论证过程会立刻让你确信

$$p(n,3)=\sum_{0\leqslant\nu\leqslant\frac{n}{3}}p(n-3\nu,2)=\sum_{0\leqslant\nu\leqslant\frac{n}{3}}\left(\left\lfloor\frac{n-3\nu}{2}\right\rfloor+1\right). \tag{6.2}$$

事实上, $p(n,3)$ 有一个漂亮的公式 (见下一节), 如果你是个知难而上的人, 你可以直接从上面的和式出发来证明这个公式. 然而, 第 5 章的思想给了我们一个强力手段来得到 $p(n,m)$ 的公式. 这个方法要求你知道著名的二项式级数 (我们会在第 7 章回到这个话题).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m}{m}q^n=(1-q)^{-m-1},\quad |q|<1, \tag{6.3}$$

其中

$$\binom{n+m}{m}=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}=\frac{(n+m)!}{n!m!}.$$

如果 $m=0$, 这当然就是几何级数求和

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q},\quad |q|<1. \tag{6.4}$$

如果我们对式 (6.4) 求导, 我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}nq^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2}, \tag{6.5}$$

上式我们可以重写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}q^n=(1-q)^{-2},$$

也就是式 (6.3) 中取 $m=1$.

如果我们对式 (6.5) 求导 (即, 对式 (6.4) 求二阶导), 我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)q^{n-2}=\frac{2}{(1-q)^3},$$

(同样) 我们可以重写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}q^n=(1-q)^{-3},$$

也就是式 (6.3) 中取 $m=2$.

习题:

81. 证明式 (6.3) 可以由式 (6.4) 求导 m 次得到. (难度系数: 2)

6.2 $p(n,3)$ 的公式

正如我们在第 5 章看到的, $p(n,m)$ 有如下生成函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n,m)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}. \tag{6.6}$$

我们可以怎么处理式 (6.6) 右边的乘积呢? 我们想要对它进行代数变换, 使我们得到的形式容易进行幂级数展开. 你首先会考虑部分分式分解; 譬如,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n,3)q^n = \frac{1/6}{(1-q)^3} + \frac{1/4}{(1-q)^2} + \frac{17/72}{1-q} + \frac{1/8}{1+q} + \frac{1/9(q+2)}{1+q+q^2}.$$

对这里面的五个项分别做 Maclaurin 级数展开是可行的但多少有些烦琐无趣. 然而, 如果我们稍微改变部分分式的选取, 我们将得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p(n,3)q^n &= \frac{1/6}{(1-q)^3} + \frac{1/4}{(1-q)^2} + \frac{1/4}{1-q^2} + \frac{1/3}{1-q^3}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}q^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}q^{3n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{12}q^n - \frac{1}{3}q^n + \frac{1}{4}q^{2n} + \frac{1}{3}q^{3n}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{12} + \epsilon(n)\right)q^n, \end{aligned} \tag{6.7}$$

其中 $\epsilon(n)$ 只取值为 $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}, 0, \frac{1}{4}$.

现在由 Maclaurin 级数展开的唯一性, 我们得出

$$p(n,3) = \frac{(n+3)^2}{12} + \epsilon(n).$$

但是 $p(n,3)$ 显然是整数, 并且 $|\epsilon(n)| < \frac{1}{2}$.
因此,

$$p(n,3) = \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\}, \tag{6.8}$$

其中 $\{x\}$ 是最接近 x 的整数.

这个方法可以追溯到 Cayley 和 MacMahon, 并且 A. Munagi 在他即将发表的博士论文中将其推广了.

从式 (6.2) 推出式 (6.8) 是可行的, 但是非常复杂. 补充说一句, 我们看到随着式 (6.7) 一步步变形, 虽然我们事先不知道公式 (6.8), 但最后还是可以得出它. 这也是生成函数技巧的其中一个强大之处.

习题:

82. 证明 $p(n,2)=(2n+3+(-1)^n)/4$. (难度系数: 2)

83. 证明

$$p(n|\text{部分属于}\{1,3,5\})=\left\{\frac{(n+3)(n+6)}{30}\right\}=\left\{\frac{(n+4)(n+5)}{30}\right\}.$$

(难度系数: 3)

84. 证明

$$p(n|\text{部分属于}\{2,3,4\})=\left\{\frac{(n-3)^2}{12}\right\}-\left\lfloor\frac{n-3}{4}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor.$$

(难度系数: 3①)

85. 证明周长为 n 的两两不全等的整数边长三角形的数量由下式给出

$$p(n-3|\text{部分属于}\{2,3,4\}).$$

(难度系数: 3)

6.3　$p(n,4)$ 的公式

当我们设想一下在 $m>3$ 时考虑 $p(n,m)$, 就会发现式 (6.8) 的简单性有些误导了我们. 我们细致地处理 $p(n,4)$ 来揭示复杂度是如何产生的.

首先, 我们需要下列公式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n/2}\left((n+1)-2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)q^n. \tag{6.9}$$

式 (6.9) 的目的显而易见. 我们想要将左边的级数 —— 只含有 q 的偶数次幂, 替换成右边的级数 —— 包含所有非负次幂. 上式是明显成立的, 只要我们意识到

$$(n+1)-2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor=\begin{cases}0, & n\text{ 是奇数},\\ 1, & n\text{ 是偶数}.\end{cases}$$

①原著没有给出难度系数, 译者按自己的理解给个 3.

顺着我们之前处理 $p(n,3)$ 的思路, 我们从对 $p(n,4)$ 的生成函数进行部分分式分解开始:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p(n,4)q^n &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} \\ &= \frac{1/24}{(1-q)^4} + \frac{1/8}{(1-q)^3} + \frac{59/288}{(1-q)^2} + \frac{17/72}{1-q} + \frac{1/32}{(1+q)^2} \\ &\quad + \frac{1/8}{1+q} + \frac{(1+q)/9}{1+q+q^2} + \frac{1/8}{1+q^2}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

这个式 (6.10) 十分缺乏美感, 也很难直接处理. 然而, 只要稍作代数运算就能发现式 (6.10) 可以被变形成下面更容易处理的形式:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p(n,4)q^n &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} \\ &= \frac{1/24}{(1-q)^4} + \frac{1/8}{(1-q)^3} + \frac{(5/12)^2}{(1-q)^2} + \frac{1/8}{(1-q^2)^2} \\ &\quad + \frac{1/16}{1-q^2} + \frac{(2+q)/9}{1-q^3} + \frac{1/4}{1-q^4} \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\left(\frac{1}{24}\binom{n+3}{3}\right) + \frac{1}{8}\binom{n+2}{2} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 (n+1)\right)q^n \\ &\quad + \left(\frac{1}{8}(n+1) + \frac{1}{8}\right)q^{2n} \\ &\quad + \sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{16}q^{2n} + \frac{2}{9}q^{3n} + \frac{1}{9}q^{3n+1} + \frac{1}{4}q^{4n}\right) \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{24}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{8}\binom{n+2}{2} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 (n+1)\right)q^n \\ &\quad + \left(\frac{1}{8}\left(\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{8}\right)\left((n+1) - 2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)q^n \\ &\quad + \sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{16}q^{2n} + \frac{2}{9}q^{3n} + \frac{1}{9}q^{3n+1} + \frac{1}{4}q^{4n}\right). \end{aligned} \tag{6.11}$$

现在我们注意到式 (6.11) 中最后一个求和式表示的幂级数的系数落在闭区间

$\left[-\frac{1}{16}, \frac{17}{36}\right]$. 即有, 每一个系数的绝对值严格小于 $\frac{1}{2}$.

所以, 因为有 $p(n,4)$ 显然是整数, 根据 Maclaurin 级数展开的唯一性, 我们从 (6.11) 中得到

$$\begin{aligned} p(n,4) &= \left\{\frac{1}{24}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{8}\binom{n+2}{2} + \frac{25}{144}(n+1)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8}(n+4)\left(\frac{n+1}{2} - \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)\right\} \\ &= \left\{(n+1)(n^2+23n+85)/144 - (n+4)\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor \Big/ 8\right\}. \end{aligned}$$

习题:

86. 证明

$$p(n,4) = \left\{\left\lfloor\frac{n+4}{2}\right\rfloor^2\left(3\left\lfloor\frac{n+9}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n+10}{2}\right\rfloor\right)\Big/36\right\}.$$

(难度系数：3)

87. 证明

$$p(n,4) = \left\{(n+5)\left(n^2+n+22+18\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\Big/144\right\}.$$

(难度系数：3)

88. 证明

$$p(n,5) = \left\{(n+8)\left(n^3+22n^2+44n+248+180\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\Big/2880\right\}.$$

(难度系数：3)

既然已经向你清晰地呈现了处理 $p(n,m)$ 时逐渐增长的复杂度, 我们最后来描述一些关于分拆函数公式的更为令人惊叹的深入工作.

整个分拆理论中最著名的结果可能莫过于 G. H. Hardy(1959), S. Ramanujan以及 H. Rademacher找到的 $p(n)$ 的公式, 即

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sinh\left(\pi\left(\frac{2}{3}(x-1/24)\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x-\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)_{x=n} + \text{相似的项}. \qquad (6.12)$$

式 (6.12) 以及相关公式的证明依赖于对 $p(n)$ 生成函数进行极端精细的研究, 它涉及复变函数理论.

前面几节的公式及其相关的历史, 全部取自于Andrews (2003).

6.4 $\lim_{n\to\infty} p(n)^{1/n} = 1$

尽管在这本书中, 我们不能证明式 (6.12) 或是任何哪怕有一点儿类似于它的公式, 但是我们可以讨论别的一些有关 $p(n)$ 的事实, 即, 它满足

$$\lim_{n\to\infty} p(n)^{1/n} = 1, \tag{6.13}$$

因此它可被称为一个次指数增长函数.

即便是式 (6.13) 的证明也多少有些复杂. 首先, 我们将证明

$$np(n) = \sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j), \tag{6.14}$$

其中 $\sigma(j)$ 是 j 的因子之和. 为了得到式 (6.14), 我们只需写下所有的 n 的分拆, 然后把他们加起来. 因为有 $p(n)$ 个分拆, 所以总和一定是 $np(n)$. 另一方面, 让我们考察一下部分 h 在所有的分拆中出现过多少次. 显然, 它至少在 $p(n-h)$ 个分拆中出现过一次, 至少在 $p(n-2h)$ 个分拆中出现过两次, 至少在 $p(n-3h)$ 个分拆中出现过三次. 因此, h 出现的总次数是

$$p(n-h) + p(n-2h) + p(n-3h) + \cdots .$$

因此,

$$\begin{aligned} np(n) &= \sum_{h=1}^{n} h(p(n-h) + p(n-2h) + p(n-3h) + \cdots) \\ &= \sum_{hk\leqslant n} hp(n-hk) = \sum_{j=1}^{n} p(n-j) \sum_{h|j} h = \sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j), \end{aligned}$$

正如式 (6.14) 中所宣称的.

我们现在想要证明, 对任意正数 $\epsilon > 0$, 都对应着某个 (有可能很大的) 正常数 $C = C(\epsilon)$ 使得

$$1 \leqslant p(n) \leqslant C(1+\epsilon)^n. \tag{6.15}$$

首先我们注意到无穷级数

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(j+1)}{2(1+\epsilon)^j}$$

是收敛的. 用比式判别法即可证明. 选一个整数 $N = N(\epsilon)$ 满足

$$N \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(j+1)}{2(1+\epsilon)^j}.$$

现在取

$$C = \max_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{p(n)}{(1+\epsilon)^n}. \tag{6.16}$$

我们将要对 n 归纳证明式 (6.15) 对于式 (6.16) 定义的 C 是成立的. 显然根据 C 的定义, 等式 (6.15) 对 $n \leqslant N$ 成立. 假设现在我们知道式 (6.15) 对小于某个特定的 $n(> N)$ 都是成立的. 那么根据式 (6.14),

$$\begin{aligned}
p(n) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} C(1+\epsilon)^{n-j}\sigma(j)\\
&= C(1+\epsilon)^n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma(j)}{(1+\epsilon)^j} \leqslant C(1+\epsilon)^n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(1+2+3+\cdots+j)}{(1+\epsilon)^j}\\
&= C(1+\epsilon)^n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2(1+\epsilon)^j} \leqslant C(1+\epsilon)^n\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j(j+1)}{2(1+\epsilon)^j}\\
&\leqslant C(1+\epsilon)^n \qquad (\text{根据我们选择的 } N).
\end{aligned}$$

因此, 由数学归纳法得证式 (6.15). 从而

$$1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} p(n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} p(n)^{1/n} \leqslant \lim_{n\to\infty} C^{1/n}(1+\epsilon) = 1+\epsilon.$$

但 ϵ 是任意正数. 因此,

$$\limsup_{n\to\infty} p(n)^{1/n} = 1.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} p(n)^{1/n} = 1,$$

证毕.

$p(n)^{1/n}$ 收敛到 1 这个我们刚刚证明的事实, 在下面的表中可以明显看出来. 作为一个比较, 我们也展示了 $F_n^{1/n}$ 收敛到黄金分割数 $(1+\sqrt{5})/2 = 1.618\cdots$(回忆一下 F_n 代表第 n 个 Fibonacci 数).

n	$p(n)^{1/n}$	$F_n^{1/n}$
5	1.475	1.380
10	1.453	1.493
100	1.210	1.605
250	1.141	1.613
1000	1.075	1.617

知道这个结果的价值 (除了其他之外) 在于它让我们得出以下结论 (使用根式判别法, 见附录 A)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$$

在 $|q| < 1$ 时是绝对收敛的无穷级数.

另一个初等证明在 (Andrews, 1971c)中.

第 7 章　Gauss 多项式

分拆和生成函数的知识使我们有能力将著名的二项式数 (又称为：二项式系数) 和相关的恒等式推广. 我们将引入称作 Gauss 多项式的关于 q 的多项式 (又称为：q-二项式数或 q-二项式系数).

本章的重要内容

- 二项式定理和二项式级数表明, 二项式数 $\binom{n}{k}$ 分别作为系数出现在 $(1+z)^n$ 和 $(1-z)^{-n}$ 中.
- 一个数学对象的 q-模拟是某个关于 q 的多项式满足：当令 q 为 1 时, 它就回到原来的对象. 二项式数的这样一种 q-模拟就是 q-二项式数, 它实际上可通过计数 N 乘 m 的盒子中可嵌入的 Ferrers 板的个数来定义.
- q-二项式数也称为 Gauss 多项式. 我们将展示 Gauss 多项式的几个恒等式以及极限值, 这在后面章节很有用.

7.1　二项式数的性质

你可能已经熟知二项式系数 $\binom{n}{j}$, 它的组合定义是 n 元集合中的 j 元子集数量. 容易证明二项式数有如下简单的显式表达式：

$$\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{j(j-1)(j-2)\cdots 1}\quad \text{对} n\geqslant j\geqslant 0.$$

二项式数通常用称为 Pascal 三角的三角形表格表示：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

或者用实际的数字表示：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

记最顶行为第 0 行, 你会注意到第二行和第三行分别包含了 $(1+z)^2 = 1+2z+z^2$ 和 $(1+z)^3 = 1+3z+3z^2+z^3$ 的系数. 事实上, 第 n 行的二项式数是 $(1+z)^n$ 的系数, 著名的*二项式定理*正表明了这一点.

定理 6 (二项式定理)

$$(1+z)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j.$$

对于负指数, 要转为使用*二项式级数*(展开), 在第 6 章的某些计算中我们曾用到此结果.

定理 7 (二项式级数) 对 $|z| < 1$, 有

$$(1-z)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} z^j.$$

二项式数有许多漂亮且重要的性质. 这其中就有对称性:

$$\binom{n+j}{j} = \binom{n+j}{n};$$

一行中二项式数之和的漂亮公式:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n;$$

其交错和有一个更加简单的公式:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0 \quad 对 n \geqslant 1;$$

以及递归关系:

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \quad 对 n > j > 0,$$

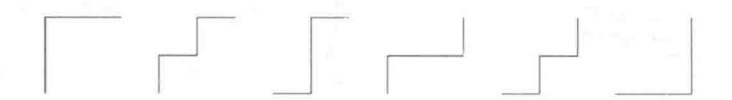
其中初始值 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$. 请你在接下来的习题中证明这些性质.

习题:

89. 从二项式数的组合定义出发, 证明公式 $\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}$. (难度系数: 2)
90. 分别用代数方法和组合方法证明二项式数的对称性. (难度系数: 2)
91. 使用递归关系计算 Pascal 三角的第五行. (难度系数: 1)
92. 分别用代数方法和组合方法证明二项式数的递归关系. (难度系数: 2)
93. 分别用组合方法和数学归纳法证明二项式定理. (难度系数: 2)
94. 在二项式定理中分别令 $z=1$ 和 $z=-1$, 证明上面两个求和公式. (难度系数: 1)
95. 用数学归纳法证明二项式级数. (提示: $(1-z)^{-(n-1)}=(1-z)(1-z)^{-n}$. 使用递归关系.) (难度系数: 2)

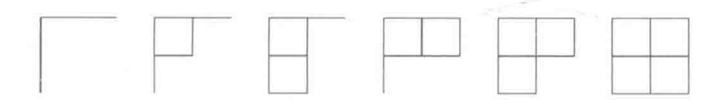
7.2　格路径和 q-二项式系数

我们来考虑下面这个问题. 在平面上, 只允许垂直向上或水平向右走单位长度, 那么从点 $(0,0)$ 到点 $(2,2)$ 有多少种路径? 这样的路径称为格路径, 在这个情况下, 答案是 6:



这个答案的解释是 $6=\binom{2+2}{2}$, 在总共 4 步中选择水平的 2 步的选法数 (剩余 2 步自然是垂直). 同理, 从 $(0,0)$ 到 (N,m) 的格路径数量由 $\binom{N+m}{m}$ 给出.

现在我们从路径的左上方插入方格来进一步细化这个结果:



如果我们把这 $\binom{2+2}{2}$ 个图视作分拆的 Ferrers 板, 它们对应于 2 乘 2 盒子中

可以嵌入的 6 个 Ferrers 板, 即, 分成至多 2 个部分, 每个部分至多为 2 的分拆:

$$\varnothing \qquad 1 \qquad 1+1 \qquad 2 \qquad 2+1 \qquad 2+2$$

类比二项式数的组合定义, 我们现在定义q-二项式数为这 $\binom{2+2}{2}$ 个分拆的生成函数 (变量为 q):

$$\begin{bmatrix} 2+2 \\ 2 \end{bmatrix} = q^0 + q^1 + q^{1+1} + q^2 + q^{2+1} + q^{2+2} = q^0 + q^1 + 2q^2 + q^3 + q^4.$$

更一般地说, q- 二项式数定义为

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \sum_{n \geqslant 0} p(n|\text{部分数量} \leqslant m, \text{部分} \leqslant N) q^n.$$

这就是所谓的二项式数的q-模拟, 也就意味着它是一个自然的加细, 满足当 $q = 1$ 时, 我们得到 $\binom{N+m}{m}$. 我们将会看到二项式数的很多性质对其 q- 模拟也同样成立. 举个例子, 对称性

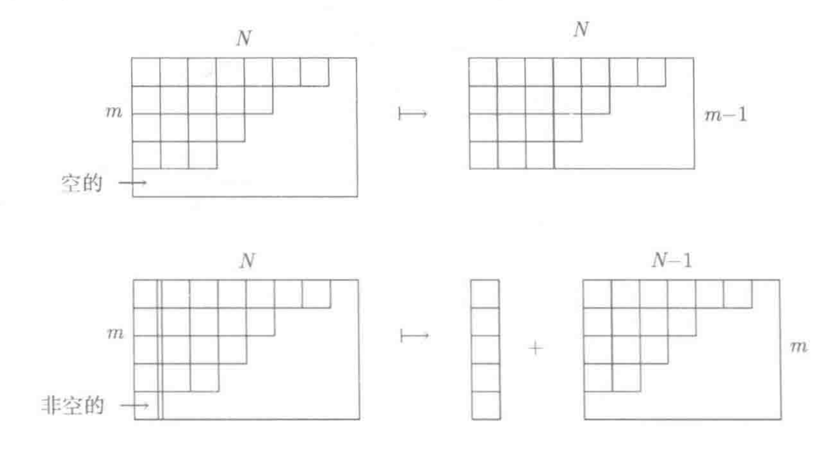
$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+m \\ N \end{bmatrix}$$

可以用 Ferrers 板的共轭立刻得出.

接着, 二项式数有递归关系, 我们可写作

$$\binom{N+m}{m} = \binom{N+m-1}{m-1} + \binom{N+m-1}{N-1}.$$

从 Ferrers 板的角度看, 这个递归关系表明 N 乘 m 的盒子中能嵌入的 Ferrers 板可以分为不相交的两个集合: 事实上可进一步嵌入 N 乘 $m-1$ 的盒子中的 Ferrers 板和那些无法嵌入的. 对后一类, 这些 Ferrers 板的第一列长度必为 m, 将它移出后剩下一个可嵌入 $N-1$ 乘 m 盒子中的 Ferrers 板.



具体到 n 的分拆, 用同样的方法可以表达为

$$\begin{aligned}&p(n|\text{部分数量} \leqslant m, \text{每个} \leqslant N)q^n\\=&p(n|\text{部分数量} \leqslant m-1, \text{每个} \leqslant N)q^n\\&+q^m p(n-m|\text{部分数量} \leqslant m, \text{每个} \leqslant N-1)q^{n-m}.\end{aligned}$$

对 n 求和就证明了 q-模拟的递归关系:

$$\begin{bmatrix}N+m\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N+m-1\\m-1\end{bmatrix}+q^m\begin{bmatrix}N+m-1\\N-1\end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

注意到, 若在原证明过程中使用共轭分拆, 我们也可以得到另一个递归关系:

$$\begin{bmatrix}N+m\\m\end{bmatrix}=q^N\begin{bmatrix}N+m-1\\m-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N+m-1\\N-1\end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

接下来, 我们有二项式数的显式公式,

$$\binom{N}{m}=\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-m+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots 1}.$$

对 q-二项式数, 类似的公式形如

$$\begin{bmatrix}N\\m\end{bmatrix}=\frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\cdots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)}.$$

或许最容易记住该公式的方法, 就是将其看作对每一个整数因子进行 q-模拟, 将 i 替换为多项式 $(1+q+\cdots+q^{i-1})=(1-q^i)/(1-q)$. 证明留作习题.

习题:

96. 从组合角度解释为什么 q-二项式数满足初始值 $\begin{bmatrix}N\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N\\N\end{bmatrix}$. (难度系数: 1)
97. 用数学归纳法证明 q-二项式数的公式, 在归纳步骤中使用递归关系. (难度系数: 2)

7.3 q-二项式定理和 q-二项式级数

我们现在的目标是找到二项式定理和二项式级数的 q-模拟. 因为 q-二项式数是特定分拆的生成函数, 所以这里的诀窍是将 q 分别引入到二项式定理和二项式级数的左边表达式 $(1+z)^n$ 和 $(1-z)^{-n}$ 中, 使得它们也能同时计数分拆.

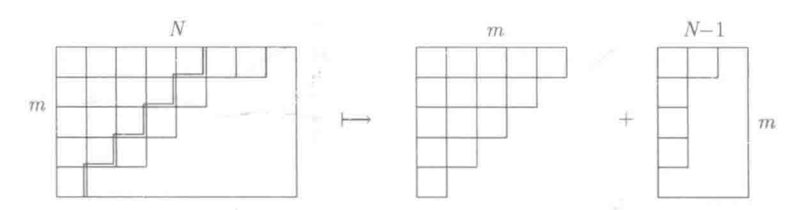
第 5 章已经解释过如何做到这一点. 等式 (5.9) 和 (5.11) 可特殊化为下列恒等式:

$$\prod_{j=1}^{N}(1+zq^j)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p(n|m\text{个相异部分, 每个}\leqslant N)z^m q^n \tag{7.3}$$

以及

$$\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-zq^j}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p(n|m\text{个部分, 每个}\leqslant N)z^m q^n. \tag{7.4}$$

为了首先得到 q-二项式定理, 利用式 (7.3) 来为其左边建立模型看起来非常合理. 但是式 (7.3) 中的分拆有 m 个相异部分, 每个部分 $\leqslant N$; 然而 $\begin{bmatrix}N\\m\end{bmatrix}$ 计数的分拆是至多 m 个部分, 每个部分 $\leqslant N-m$, 不一定是相异的. 不过, 这两类分拆集合之间有一个简单的双射: 从前一类分拆出发, 对 1 到 m 之间所有 i, 从第 i 小的部分中移出 i:

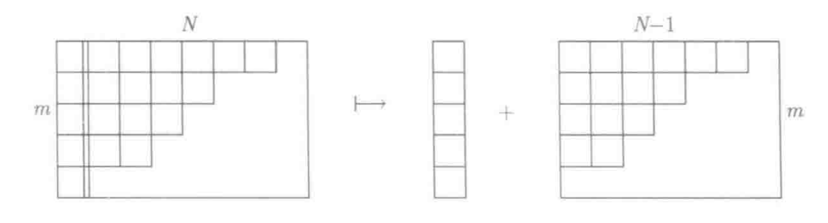


在这个双射中, 我们移出了 $1+2+\cdots+m=m(m+1)/2$ 个方格, 所以定理具有如下形式.

定理 8 (q-二项式定理)

$$\prod_{j=1}^{N}(1+zq^j)=\sum_{m=0}^{\infty}q^{m(m+1)/2}\begin{bmatrix}N\\m\end{bmatrix}z^m.$$

对于 q- 二项式级数, 我们遇到了类似的问题, 但解决方法更加简单. 如果我们利用 (7.4) 为其左边建立模型, 我们必须将 m 个部分的分拆变换为至多 m 个部分的分拆. 一个明显的解决方法是移出 Ferrers 板的第一列 (长为 m). 因为开始的分拆有 m 个部分, 每个部分 $\leqslant N$, 变换后的分拆将有至多 m 个部分, 每个部分 $\leqslant N-1$.



这个双射证明了 q-二项式级数:

定理 9 (q-二项式级数) 对 $|z|<1$ 及 $|q|<1$, 有

$$\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-zq^j}=\sum_{m=0}^{\infty}q^m\begin{bmatrix}N+m-1\\ m\end{bmatrix}z^m.$$

习题:

98. 在 q- 二项式定理中分别令 $z=1$ 和 $z=-1$, 推导出两个恒等式. (难度系数: 1)

7.4 Gauss 多项式恒等式

q-二项式数也称为Gauss *多项式*. 根据组合定义, 它们是 q 的多项式, 并且由公式

$$\begin{bmatrix}N\\ m\end{bmatrix}=\frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\cdots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)}$$

可清楚地得出 (多项式的) 次数应当是 $mN-m(m-1)/2-m(m+1)/2=mN-m^2=m(N-m)$.

Gauss 可能并不是第一个定义这些多项式的人, 但是为了计算 Gauss 和的符号, 他的确证明了下列公式.

定理 10 (Gauss 公式)

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}=\begin{cases}0, & n \text{ 是奇数},\\ (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{n-1}), & n \text{ 是偶数}.\end{cases}$$

当 n 是奇数的情况事实上并没有那么复杂, 因为如果 n 是奇数, 那么

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\begin{bmatrix}n\\ n-j\end{bmatrix}\\ &=(-1)^n\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix} \qquad \text{(由对称性)}\\ &=-\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{7.5}$$

但是只有当它是 0 时, 一个多项式才会等于它的负数. 所以 Gauss 公式的第一行是成立的.

假设我们记 Gauss 公式的左边为 $f(n)$. 则根据 q-二项式数的递归关系 (7.1),

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j}\begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}\right) \\ &= f(n-1) + (-1)^n\sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

然而另一个递归关系 (7.2) 得出

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^{j}\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}\right) \\ &= -f(n-1) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

把上面两个 $f(n)$ 的表达式加起来, 我们发现如果 n 是偶数, 那么

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(1-(1-q^j)\right)\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(1-q^j)\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \qquad \text{(利用 Gauss 公式的第一行)} \\ &= -(1-q^{n-1})\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\begin{bmatrix} n-2 \\ j-1 \end{bmatrix} \\ &= (1-q^{n-1})f(n-2). \end{aligned}$$

因此, 当 n 为偶数,

$$\begin{aligned} f(n) &= (1-q^{n-1})f(n-2) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3})f(n-4) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3})\cdots(1-q^3)(1-q)f(0) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3})\cdots(1-q^3)(1-q), \end{aligned}$$

这正是我们想要的, Gauss 公式得证.

同样还有关于二项式数平方和的老生常谈:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2=\binom{2n}{n}.$$

与其直接回顾这个经典恒等式的证明, 我们将证明它的 q-模拟

$$\sum_{j=0}^{n}q^{j^2}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

事实上, 这比证明 Gauss 公式甚至还要简单, 即, 利用定理 8,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2n}z^jq^{\frac{j(j+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\j\end{bmatrix}&=\prod_{j=1}^{2n}(1+zq^j)=\prod_{j=1}^{n}(1+zq^j)\prod_{j=1}^{n}(1+(zq^n)q^j)\\&=\sum_{j=0}^{n}z^jq^{j(j+1)/2}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{n}(zq^n)^kq^{k(k+1)/2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(用两次q-二项式定理).

比较上式两边 z^n 的系数, 我们看到

$$\begin{aligned}q^{n(n+1)/2}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}&=\sum_{k=0}^{n}q^{(n-k)(n-k+1)/2}\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}q^{nk+k(k+1)/2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\\&=\sum_{k=0}^{n}q^{n(n+1)/2+k^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}^2,\end{aligned}$$

其中最后一步我们使用了 q-二项式数的对称性. 我们看到当约去 $q^{n(n+1)/2}$ 后, 我们便证明了 (7.6). 在下一章, 我们将看到这个恒等式是很重要的.

习题:

99. 证明

$$\sum_{j=0}^{n}q^{\frac{j}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}=(1+q^{\frac{1}{2}})(1+q)(1+q^{\frac{3}{2}})\cdots(1+q^{\frac{n}{2}}).$$

(难度系数: 3)

100. 证明

$$\sum_{j=0}^{n}q^{j}\begin{bmatrix}m+j\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n+m+1\\n\end{bmatrix}.$$

(难度系数: 2)

7.5 Gauss 多项式的极限

在下一章, 我们需要知道当有些 (也可能是全部) 参数变大时, Gauss 多项式将如何变化.

Gauss 多项式的既有公式使这个问题变得简单了. 首先, 对固定的 m,

$$\lim_{N\to\infty}\begin{bmatrix}N\\m\end{bmatrix}=\lim_{N\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{N}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)\prod_{j=1}^{N-m}(1-q^j)}$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}=\frac{1}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)}. \tag{7.7}$$

接下来, 对固定的 m_1 和 m_2, 且令 $R>S$ 均为正数,

$$\lim_{N\to\infty}\begin{bmatrix}RN+m_1\\SN+m_2\end{bmatrix}=\lim_{N\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{RN+m_1}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{SN+m_2}(1-q^j)\prod_{j=1}^{(R-S)N+m_1-m_2}(1-q^j)}$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}=\frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}. \tag{7.8}$$

第 8 章 Durfee 方形

在前一章的等式 (7.6) 中, 我们证明了关于 Gauss 多项式的恒等式

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

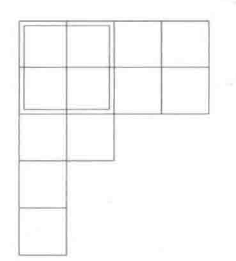
现在我们能够纯粹通过对分拆重新分类来理解这个恒等式, 该分类方法取决于一种叫做*Durfee 方形*的东西.

本章的重要内容

- 一个分拆的 Ferrers 板可被分解为由一个方形连起来的两个较小的 Ferrers 板, 该方形称为 Durfee 方形.
- 与 Durfee 方形相联系的一种分拆表示方法称为 Frobenius 符号.
- Frobenius 符号的生成函数给出了一个著名且非常有用的定理, Jacobi 三重积公式的简洁证明.
- 使用 Gauss 多项式和 Jacobi 三重积公式, 我们来证明 Rogers-Ramanujan 恒等式.
- 将分拆分解为相继的 Durfee 方形可以得到第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式的一个优美推广.

8.1 Durfee 方形和生成函数

让我们回忆一下分拆的 Ferrers 板. 比如, $4+4+2+1+1$ 的 Ferrers 板是



我们立即看到一个最大可能的方形含于 Ferrers 板中且紧靠在 Ferrers 板的左上角. 这被称为**分拆的** *Durfee* **方形**. 在这个例子中, 分拆 $4+4+2+1+1$ 有一个边长为 2 的 Durfee 方形.

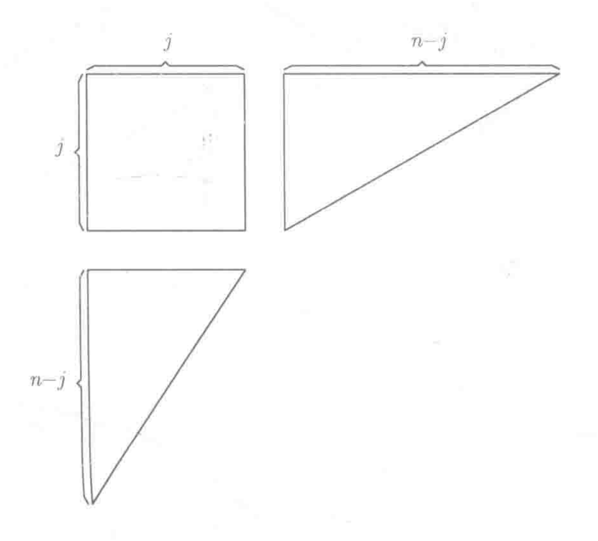
如果你偏爱一个操作性更强的定义, 你可以定义一个给定的分拆有边长为 s 的 Durfee 方形, 如果第 s 个部分 (部分从大到小编号)$\geqslant s$, 而第 $s+1$ 个部分 $\leqslant s$.

让我们从这个视角重新考虑式 (8.1). 在第 7 章中, 我们知道 q- 二项式数

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

是至多 n 个部分, 每个部分 $\leqslant n$ 的所有分拆的生成函数.

在这些分拆中, Durfee 方形的边长为 j 的分拆的生成函数是什么呢? 利用如下分拆的 Ferrers 板的通用表示可以相当简单地回答这个问题:



$j \times j$ 方块组成的分拆显然由下面单项式生成

$$q^{j\times j} = q^{j^2}.$$

根据第 7 章中 q-二项式数的定义, 右上方的部分由下式生成

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix},$$

并且左下方的部分由下式生成

$$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}.$$

因此, 至多 n 个部分, 每个部分 $\leqslant n$ 且 Durfee 方形边长为 j 的分拆生成函数为

$$q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2.$$

但是 $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$ 计数的每个分拆都有唯一的 Durfee 方形边长取 j, $0 \leqslant j \leqslant n$. 因此,

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix},$$

也就是式 (8.1).

如果我们令 $n \to \infty$, 我们直接推导出一个 Jacobi 最早发现的公式:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^j)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}. \tag{8.2}$$

习题:

101. 考察部分 $\leqslant N$ 的所有分拆并同时标记 Durfee 方形的大小以及部分的数量. 证明

$$\sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} \frac{z^j q^{j^2}}{(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^j)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-zq^n}.$$

(难度系数: 2)

102. 证明每个部分 $\leqslant N$ 的自共轭分拆的生成函数是

$$\sum_{j=0}^{N} q^{j^2}\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_{q^2},$$

其中 $\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_{q^2}$ 是将 Gauss 多项式 $\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}$ 中的 q 替换为 q^2. (难度系数: 2)

103. 推导出第 7 章中 Gauss 多项式的公式

$$\sum_{j=0}^{N} q^{j^2}\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_{q^2} = (1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2N-1}).$$

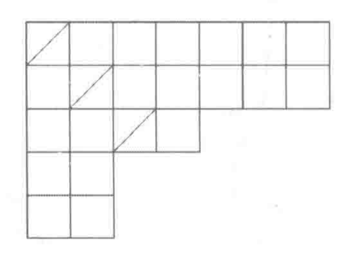
(难度系数: 2)

104. 根据习题 102 和 103, 证明 n 分成相异的奇数部分, 每个部分 $\leqslant 2N-1$ 的分拆数量, 等于 n 分成每个部分 $\leqslant N$ 的自共轭分拆数量. (难度系数: 2)

105. 为习题 104 中的命题构造双射证明. (难度系数: 3)

8.2 Frobenius 符号

根据分拆的 Ferrers 板, 我们能构造一个全新的分拆的数值表示, 这个表示可以直接反映 Durfee 方形的大小以及共轭分拆. 这个新的表示被称为分拆的*Frobenius* 符号. 它可以如下构造, (例如) 对 $7+7+4+2+2$:



这个符号包含两个递降的非负整数行. 两行的长度均为 s, 其中 s 是 Durfee 方形的大小. 第一行的第 j 个项是对角线 (在图中以斜线标注) 右侧 Ferrers 板第 j 行的方格数. 第二行的第 j 个项是对角线下方 Ferrers 板的第 j 列的方格数.

所以分拆 $7+7+4+2+2$ 的 Frobenius 符号为

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

并且我们显然可以从这个符号重构出原来的分拆.

现在生成用 Frobenius 符号表示的分拆就变成相当容易的事情了. 也就是说, 我们考察下式中 z^0 的系数

$$\begin{aligned} &\{(1+(zq)q^0)(1+(zq)q^1)(1+(zq)q^2)(1+(zq)q^3)\cdots\} \\ &\times\{(1+z^{-1}q^0)(1+z^{-1}q^1)(1+z^{-1}q^2)(1+z^{-1}q^3)\cdots\}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

当我们为了得到 z^0, 将这些乘积展开, 我们需要在第一个和第二个花括号中的乘积中, 选择恰好同样多个第二项, 比如说 s 个. 所以一个典型的项会形如

$$q^s \cdot q^{a_1+a_2+\cdots+a_s} q^{b_1+b_2+\cdots+b_s},$$

其中 $a_1 > a_2 > \cdots > a_s \geqslant 0$ 且 $b_1 > b_2 > \cdots > b_s \geqslant 0$. 然而这对应于 Frobenius 符号

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \cdots a_s \\ b_1 b_2 \cdots b_s \end{pmatrix},$$

这个符号唯一对应了一个 $s + \sum a_i + \sum b_i$ 的分拆.

因为 Frobenius 符号和 n 的分拆有一个完美的对应, 我们得出式 (8.3) 中 z^0 的系数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}. \tag{8.4}$$

8.3 Jacobi 三重积公式

Frobenius 符号的生成函数的自然观点使我们能简单地证明 Jacobi 的一个著名定理. 这个思路还被用在更一般的情况产生了大量应用 (Andrews, 1984).

定理 11 (Jacobi 三重积公式)　对 $|q| < 1, z \neq 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}). \tag{8.5}$$

为了证明 Jacobi 三重积公式, 我们定义

$$J(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}).$$

我们在 $z = 0$ 处求 $J(z)$ 的 Laurent 展开, 则

$$J(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(q) z^n. \tag{8.6}$$

进一步,

$$\begin{aligned}
J(zq) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1+zq^{n+1})(1+z^{-1}q^{n-2}) \\
&= (1+z^{-1}q^{-1}) \prod_{n=2}^{\infty} (1+zq^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{-1}q^{n-1}) \\
&= z^{-1}q^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1+zq^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{-1}q^{n-1}) \\
&= z^{-1}q^{-1} J(z).
\end{aligned}$$

比较两边 z^n 的系数, 我们得到

$$q^n A_n(q) = q^{-1} A_{n+1}(q).$$

迭代上述递归关系可得出对所有 n,

$$A_n(q) = q^{\frac{n(n+1)}{2}} A_0(q). \tag{8.7}$$

但是根据等式 (8.4) 及其之前的讨论,

$$A_0(q)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}, \tag{8.8}$$

结合式 (8.8), (8.7) 和 (8.6), 我们推导出

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1})=J(z)&=A_0(q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^nq^{\frac{n(n+1)}{2}}\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^nq^{\frac{n(n+1)}{2}},\end{aligned}$$

这明显等价于 Jacobi 三重积公式.

习题:

106. 用 q^3 替换 q, $-q^{-1}$ 替换 z, 从 Jacobi 三重积公式推导出 Euler 五角数定理. (难度系数: 1)

107. 证明恒等式 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nq^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)}{(1+q^n)}$. (难度系数: 2)

108. 证明恒等式 $\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)/2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})}$. (难度系数: 2)

109. 证明 Jacobi 恒等式 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nq^{n(n+1)/2}(2n+1)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3$. (难度系数: 3)

8.4 Rogers-Ramanujan 恒等式

Rogers-Ramanujan 恒等式没有真正简单的证明. 然而, 对 Gauss 多项式和 Jacobi 三重积公式的研究使我们足以证明 David Bressoud(1981)的一些多项式恒等式, 它们可以导出 Rogers-Ramanujan 恒等式.

效仿 Chapman (2002), 我们一步一步地来完成证明. 首先, 我们考虑五个多项式的序列:

$$s_n(q)=\sum_{j=0}^{n}q^{j^2}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}, \tag{8.9}$$

$$t_n(q)=\sum_{j=0}^{n}q^{j^2+j}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}, \tag{8.10}$$

$$\sigma_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n+2j \end{bmatrix}, \tag{8.11}$$

$$\sigma_n^\star(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+1+2j \end{bmatrix}, \tag{8.12}$$

以及

$$\tau_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+2j \end{bmatrix}. \tag{8.13}$$

接下来的几页, 我们将用数学归纳法证明

$$s_n(q) = \sigma_n(q) = \sigma_n^\star(q) \tag{8.14}$$

和

$$t_n(q) = \tau_n(q).$$

一旦证明了这些, 那么直截了当就可以来证明

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} = \lim_{n\to\infty} s_n(q) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(q) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

以及

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} = \lim_{n\to\infty} t_n(q) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(q) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}.$$

事实上, 用式 (7.7) 立刻得到

$$\lim_{n\to\infty} s_n(q) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}$$

和

$$\lim_{n\to\infty} t_n(q) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}.$$

因此我们正在处理的多项式 (序列) 当 $n\to\infty$ 时, 收敛到 Rogers-Ramanujan 恒等式的左边.

现在我们将要证明 $s_n(q)$ 和 $t_n(q)$ 的两个递归关系. 首先是①

$$
\begin{aligned}
s_n(q) &= \sum_{j\geqslant 0} q^{j^2}\left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j}\begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}\right)\\
&= s_{n-1}(q) + q^n \sum_{j\geqslant 0} q^{j^2+j}\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}\\
&= s_{n-1}(q) + q^n t_{n-1}(q).
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

第二个是

$$
\begin{aligned}
t_n(q) - q^n s_n(q) &= \sum_{j\geqslant 0} q^{j^2+j}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}(1-q^{n-j})\\
&= (1-q^n)\sum_{j\geqslant 0} q^{j^2+j}\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}\\
&= (1-q^n)t_{n-1}(q).
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

现在用数学归纳法可以简单地证明, 对所有 n, 式 (8.15) 和式 (8.16) 加上初始值 $s_0(q)=t_0(q)=1$ 唯一地确定了 $s_n(q)$ 和 $t_n(q)$.

我们现在想证明 $\sigma_n(q)$ 和 $\sigma_n^\star(q)$ 是相等的. 这是因为

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^\star(q) = &\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j+1)/2}\left(\begin{bmatrix} 2n \\ n+2j \end{bmatrix} + q^{n+1+2j}\begin{bmatrix} 2n \\ n+1+2j \end{bmatrix}\right)\\
=&\sigma_n(q) + q^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j+5)/2}\begin{bmatrix} 2n \\ n+1+2j \end{bmatrix}\right.\\
&\left. + \sum_{j=-\infty}^{-1}(-1)^j q^{j(5j+5)/2}\begin{bmatrix} 2n \\ n+1+2j \end{bmatrix}\right)\\
=&\sigma_n(q) + q^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j+5)/2}\begin{bmatrix} 2n \\ n-1-2j \end{bmatrix}\right.\\
&\left. + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{-j-1} q^{(-j-1)(5(-j))/2}\begin{bmatrix} 2n \\ n-1-2j \end{bmatrix}\right)\\
=&\sigma_n(q).
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

所以接下来我们将使用式 (8.11) 或式 (8.12), 表示 $\sigma_n(q)$. 特别地,

① 译注: 按照后文引用情况, 对式 (8.15) 和式 (8.16) 的编号进行了修正.

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(q)-\sigma_{n-1}(q)\\
=&\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j+1)/2}\begin{bmatrix}2n\\n+2j\end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j+1)/2}\begin{bmatrix}2n-1\\n+2j\end{bmatrix}\\
=&\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j+1)/2}\begin{bmatrix}2n-1\\n+2j-1\end{bmatrix}q^{n-2j}\qquad\qquad(\text{由 }(7.2))\\
=&q^n\tau_{n-1}(q).
\end{aligned}\tag{8.18}$$

最后,

$$\begin{aligned}
&\tau_n(q)-q^n\sigma_n(q)\\
=&\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j-3)/2}\left(\begin{bmatrix}2n+1\\n+1-2j\end{bmatrix}-q^{n+2j}\begin{bmatrix}2n\\n-2j\end{bmatrix}\right)\\
=&\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j-3)/2}\begin{bmatrix}2n\\n+1-2j\end{bmatrix}\qquad\qquad(\text{由 }(7.2))\\
=&\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j-3)/2}\left(\begin{bmatrix}2n-1\\n-2j\end{bmatrix}+q^{n+1-2j}\begin{bmatrix}2n-1\\n+1-2j\end{bmatrix}\right)\\
=&\tau_{n-1}(q)+q^n\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{1-j}q^{(1-j)(5(1-j)-3)/2+1-2(1-j)}\begin{bmatrix}2n-1\\n-1+2j\end{bmatrix}\\
=&\tau_{n-1}(q)-q^n\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(5j-3)/2}\begin{bmatrix}2n-1\\n-1+2j\end{bmatrix}\\
=&(1-q^n)\tau_{n-1}(q).
\end{aligned}\tag{8.19}$$

但正如我们之前提到的, 递归关系 (8.15) 和 (8.16) 加上 $s_0(q)=t_0(q)=1$ 唯一地决定了所有的 $s_n(q)$ 和 $t_n(q)$. 现在我们已经在式 (8.18) 和式 (8.19) 中证明了 $\sigma_n(q)$ 和 $\tau_n(q)$ 满足完全相同的递归关系. 并且还有 $\sigma_0(q)=\tau_0(q)=1$. 从而对每个 $n\geqslant 0$,

$$s_n(q)=\sigma_n(q)$$

并且

$$t_n(q)=\tau_n(q).$$

因此, 根据式 (8.9),

$$\begin{aligned}
&1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}\\
=&\lim_{n\to\infty}s_n(q)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(q)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \qquad \text{(由式 (7.8))}$$

$$= \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m})(1-q^{5m-2})(1-q^{5m-3})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}$$

(定理 11 中用 q^5 替代 q, $-q^{-2}$ 替代 z)

$$= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m-4})(1-q^{5m-1})},$$

这证明了第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式. 根据式 (8.10),

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} t_n(q) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(q)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \qquad \text{(由式 (7.8))}$$

$$= \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m})(1-q^{5m-1})(1-q^{5m-4})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}$$

(定理 11 中用 q^5 替代 q, $-q^{-1}$ 替代 z)

$$= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m-3})(1-q^{5m-2})},$$

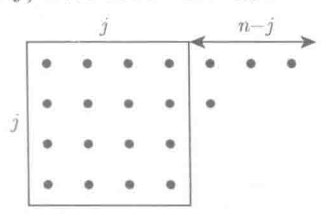
这证明了第二类 Rogers-Ramanujan 恒等式.

8.5 相继的 Durfee 方形

这里我们将要展示第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式的一个优美的推广. 让我们重新考虑等式 (8.9) 定义的多项式 $s_n(q)$:

$$s_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}.$$

我们在第 7 章已经知道了 $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ 是至多 j 个部分, 每个部分至多 $n-j$ 的分拆的生成函数. 注意到 $j^2 = j + j + j + \cdots + j$, 我们立刻得到 $s_n(q)$ 是每个部分 $\leqslant n$, 同时也 $\geqslant$ 部分数量 (上面的 j) 的分拆的生成函数.



譬如,

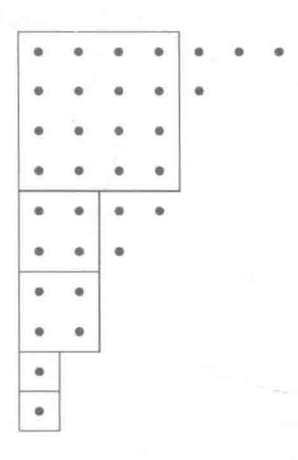
$$s_4(q) = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^{2+2} + q^{3+2} + q^{4+2} + q^{3+3} \\ + q^{4+3} + q^{4+4} + q^{3+3+3} + q^{4+3+3} + q^{4+4+3} + q^{4+4+4} + q^{4+4+4+4}.$$

如果我们从 Durfee 方形着手来考察这样的分拆, 我们看到这些分拆没有在 Durfee 方形下方的部分.

就此展开讨论, 我们可以把 Durfee 方形的概念扩展到**相继的** *Durfee* **方形**. 找到相继的 Durfee 方形的思路是考察一个给定方形下方的分拆. 举个例子, 分拆

$$7+5+4+4+4+3+2+2+1+1$$

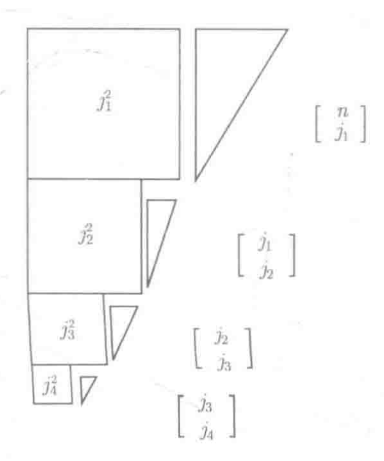
有 5 个相继的 Durfee 方形:



一旦我们具有了相继的 Durfee 方形这个思想, 那么确定至多有 k 个相继 Durfee 方形的分拆的生成函数就相当容易了. 事实上, 我们已经知道了当 $k=1$ 时的答案, 即

$$s_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}.$$

但是对一般的 k, 我们只需考虑 k 个平方数满足 $j_1^2 \geqslant j_2^2 \geqslant j_3^2 \geqslant \cdots \geqslant j_k^2$, 同时注意 Ferrers 板的空隙间可以怎样填充. 这一点从下面 Ferrers 板的简图来进行理解最容易.



因此, 至多 k 个相继 Durfee 方形的分拆的生成函数 $s_{k,n}(q)$ 是

$$\begin{aligned} s_{k,n}(q) &= \sum_{n \geqslant j_1 \geqslant j_2 \geqslant \cdots \geqslant j_k \geqslant 0} q^{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_k^2} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} j_{k-1} \\ j_k \end{bmatrix} \\ &= \sum_{n \geqslant j_1 \geqslant j_2 \geqslant \cdots \geqslant j_k \geqslant 0} \frac{q^{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_k^2}(q;q)_n}{(q;q)_{n-j_1}(q;q)_{j_1-j_2}(q;q)_{j_2-j_3}\cdots(q;q)_{j_{k-1}-j_k}(q;q)_{j_k}}, \end{aligned}$$

这里我们使用了记号 $(q;q)_m = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)$. 如果我们令 $n \to \infty$, 便得到至多 k 个相继 Durfee 方形的所有分拆的完整生成函数

$$s_{k,\infty}(q) = \sum_{j_1 \geqslant j_2 \geqslant \cdots \geqslant j_k \geqslant 0} \frac{q^{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_k^2}}{(q;q)_{j_1-j_2}(q;q)_{j_2-j_3}\cdots(q;q)_{j_{k-1}-j_k}(q;q)_{j_k}}.$$

现在能证明 (Andrews, 1979), 事实上,

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1 \geqslant j_2 \geqslant \cdots \geqslant j_k \geqslant 0} \frac{q^{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_k^2}}{(q;q)_{j_1-j_2}(q;q)_{j_2-j_3}\cdots(q;q)_{j_{k-1}-j_k}(q;q)_{j_k}} \\ &= \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq 0, \pm(k+1) \pmod{2k+3}}}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)}. \end{aligned} \tag{8.20}$$

因此我们可以得出至多 k 个相继 Durfee 方形的 n 的分拆数量, 等于将 n 分成模 $2k+3$ 不同余于 $0, \pm(k+1)$ 的部分的分拆数量.

当 $k=1$ 时, 这恰好回到了第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式.

第 9 章　Euler 定理的加细

在第 1 章和第 2 章, 我们详细考察了优雅简洁的 Euler 定理:

奇分拆的数量等于相异分拆的数量.

如我们所见, 这个定理引出了大量进一步的结果, 最享誉盛名的就是 Rogers-Ramanujan 恒等式. 在这一章, 我们将进一步深入研究 Euler 定理 (2.1), 展示它的两个组合变形, 并且考虑最近的一个加细来结束本章.

本章的重要内容

- Sylvester 加细了 Euler 定理, 他分别考虑了奇数部分的数量, 以及相继的相异部分序列的数量.
- Fine 对 Euler 定理的加细则是考虑了最大的奇数部分和相异分拆的 Dyson 秩.
- Bousquet-Mélou 和 Eriksson 的加细考虑了大小受限的奇数部分和所谓的"阶梯教室分拆".

9.1　Sylvester 加细的 Euler 恒等式

19 世纪末, 富有传奇色彩的数学家J. J. Sylvester(1882) 首先发现 Euler 定理的内涵比表面看起来要丰富得多. 我们现在要考虑的定理出现在一篇堪称鸿篇巨制的论文中, 题目是 *A constructive theory of partitions in three acts, an interact, and an exodion.*

定理 12 (Sylvester 的加细)　n 恰分成 k 种奇数部分 (每种均可重复) 的分拆数量等于 n 分成 k 个不重合的相继整数序列 (一个序列可以只有一个项) 的分拆数量.

举个例子, 当 $n = 15$ 且 $k = 3$ 时, 第一类中的 11 个分拆是

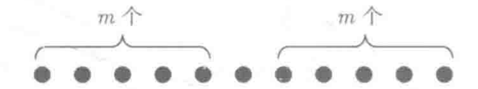
$$11+3+1,\quad 9+5+1,\quad 9+3+1+1+1,\quad 7+5+3,$$
$$7+5+1+1+1,\quad 7+3+1+1+1+1+1,\quad 7+3+3+1+1,$$
$$5+5+3+1+1,\quad 5+3+3+3+1,\quad 5+3+3+1+1+1+1,$$

$$5+3+1+1+1+1+1+1+1,$$

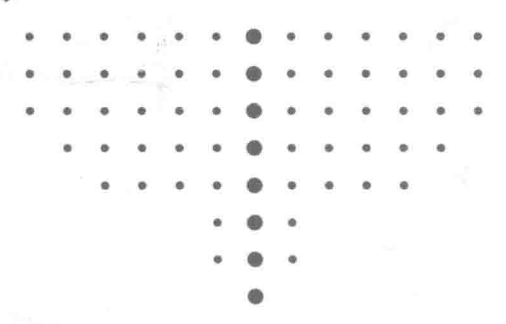
以及第二类中的 11 个分拆是

$$11+3+1,\quad 10+4+1,\quad 9+5+1,\quad 9+4+2,$$
$$8+6+1,\quad 8+5+2,\quad 8+4+2+1,\quad 7+5+3,\quad 7+5+2+1,$$
$$7+4+3+1,\quad 6+5+3+1.$$

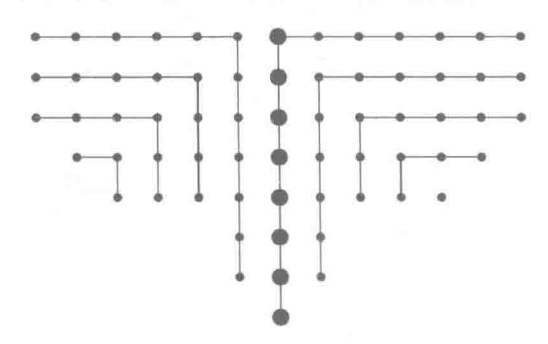
我们现在通过对奇分拆的 Ferrers 图稍作变形来证明这个结果. 我们暂且放弃将点行或是方格行按照左对齐排列表示部分的方法, 取而代之的是将它们如下居中对齐排列:



奇分拆明显可以表示成居中对齐的图. 举个例子, 分拆 $13+13+13+11+9+3+3+1$ 因此表示为



现在我们将这个表示中的点以一种新的方式关联起来:



所得新分拆为 $14+12+11+8+7+6+4+3+1$.

我们惊奇地观察到新分拆为一个相异分拆. 可能你会更加惊奇地发现第一个分拆恰好使用了五个不同奇数而第二个分拆包含了五个不重合的序列 14, $12+11$,

$8+7+6, 4+3$ 和 1.

不过, 只要一点点思考我们就能说服自己这个现象事实上总会发生. 最初的图是中轴对称的. 我们看到, 第二个图中相继的直角 (从中间开始), 如果向左拐, 那么与前一个直角上对应的点数相比, 纵向上最大能相等, 横向上最大能少一个. 另一方面, 如果向右拐, 那么与前一个直角上对应的点数相比, 纵向上最大能少一个, 横向上最大能相等. 不仅如此, 唯一能使该直角比前一个直角恰好少一个点的方法是, 它们从同一行纵向出发, 在拥有同样点数的行上终止. 换句话说, 只要直角从同一个奇数部分所在行开始并且在等长的行结束, 那么 (对应的) 序列就会连续.

所以在上面的例子中, 产生 14 是因为从单点行出发, 以第一个 13 所在行结束. 第二个部分从 3 个点的行出发, 所以自动得到了一个以 12 开始的新序列. 第三个部分从同样的行出发并且也在 13 个点的行结束. 所以我们得到了 11, 即没有产生新的序列. 这个分析揭示出 8, 7 和 6 之所以出现, 是因为都从含 9 个点的行出发, 在 13 个点的行结束. 4 和 3 则是从 9 个点的行走到 11 个点的行; 因此, 产生了一个新的序列. 最后 1 从 9 个点的行开始并结束. 逆映射乍看起来会显得有些棘手, 但它相当容易被构造出来.

事实上, 上面的分析已经证明了 Sylvester 关于 Euler 定理的加细.

习题:

110. 证明 n 分成最大部分为 k 的相异分拆数量等于 n 的满足部分数量加上最大部分减 1 的一半等于 k 的奇分拆数量. (难度系数: 2)

9.2 Fine 的加细

20 世纪 40 年代初, Freeman Dyson (1944)引入了分拆的 秩, 最大的部分减去部分的数量. 因此, $4+3+2+2+1+1$ 的秩是 $4-6=-2$. Dyson 寻找秩的动机源于他想要给出 Ramanujan 定理的组合解释, 也就是 $p(5n+4)$ 总是被 5 整除. Dyson 想为每一个分拆关联一个参数, 从而自然地将 $5n+4$ 的分拆分成五个大小相等的等价类. 他猜想 (并且被 Atkin 和 Swinnerton-Dyer(1954) 证明了) 根据秩的模 5 剩余分类可以达到他的目的.

几年后, Nathn Fine 观察到利用这个概念可以加细 Euler 定理.

定理 13 (Fine 的加细)　n 分成秩为 $2r$ 或 $2r+1$ 的相异分拆数量, 等于 n 分成最大部分为 $2r+1$ 的奇分拆数量.

因此我们可以把 11 的十二个相异分拆和奇分拆编组为如下六个子集:

11	11
10+1	9+1+1
9+2,8+3	7+3+1,7+1+1+1
8+2+1,7+4,7+3+1,6+5	5+5+1,5+3+3,5+3+1+1+1,5+1+···+1
6+4+1,6+3+2,5+4+2	3+3+3+1+1,3+3+1+···+1,3+1+1···+1
5+3+2+1	1+1+···+1

Andrews (1983) 发现了一个非常简单的算法, 可以建立最大部分为 $2r+1$ 的 n 的奇分拆到秩为 $2r$ 或 $2r+1$ 的 n 的相异分拆的双射. 映射如下:

令 π 是秩为 $2r$ 或 $2r+1$ 的相异分拆. 如果秩为 $2r$, 那么删除 π 的最大部分, 并且给每一个剩下的部分加 1; 如果秩为 $2r+1$, 那么同样删除最大部分, 给剩余的部分加 1 并且插入一个 1 作为新的部分. 注意到在每种情况中, 被分拆的数要减少 $2r+1$. 并且, 得到的新分拆的秩 $\leqslant 2r+1$.

现在重复这个变换直到分拆完全为空. (这么做的) 结果, 你将得到一个非增的奇数序列, 每个奇数都 $\leqslant 2r+1$, 也就是我们想得到的 n 的分拆. 不仅如此, 这个映射显然是可逆的, 这意味着这个双射证明了 Fine 的加细.

为了看看这个双射的实际操作, 我们来处理 $n=11, r=2$ 的情况 (所以 $2r+1=5$). 每一类各自有四个分拆, 变换如下 (其中每一个 x 标记了添加到部分中的 1):

```
· · · · · · · ·       x · ·
· ·           ⟶      x ·     ⟶  x · ·  ⟶  x · ·
·             5      x        1  x ·    1  x

⟶  x  .  ⟶  x  .  ⟶  x  ⟶  φ
1  x     1        1     1
```

所以 $8+2+1 \to 5+1+1+1+1+1+1$,

```
· · · · · · · ·  ⟶  x · · · ·   ⟶  x ·  ⟶  x ·  ⟶  x  ⟶  φ
· · · ·          5  x           3  x    1       1     1
```

所以 $7+4 \to 5+3+1+1+1$,

```
· · · · · · ·
· · ·          ⟶  x · · ·  ⟶  x · ·  ⟶  φ
·              5  x .      3         3
```

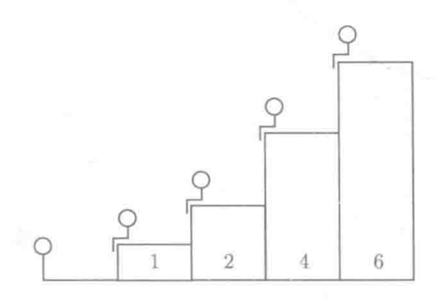
所以 $7+3+1 \to 5+3+3$,

```
· · · · · ·  ⟶  x · · · · ·  ⟶  x  ⟶  φ
· · · · ·    5               5     1
```

所以 $6+5 \to 5+5+1$.

9.3 阶梯教室分拆

我们现在将要展示最近才发现的 Euler 恒等式的一个加细. 1995 年, Eriksson 正在研究一种叫做*Coxeter* 群的代数对象的组合表示. 作为他的工作中一个完全意想不到的副产品, 他不经意间发现了一个分拆恒等式, 后来以**阶梯教室分拆定理**之名为人所知. 取这个名字的想法源于阶梯教室的建筑结构要求: 在阶梯教室中, 固定座位行数 N. 在每一个座位上的观众, 都应当能清楚看到演讲者, 而不会被其前面的座位阻挡视线.



这个阶梯教室中的座位高度的序列对应了一个阶梯教室分拆 $(1,2,4,6)$. (**阶梯教室** (lecture hall)这个名字同时也表示了对著名组合学家 Marshall Hall以及 Philip Hall的追忆, 他们的名字曾和许多重要定理联系在一起.) 正式来说, 长度为 $N \geqslant 1$ 的阶梯教室分拆的集合是

$$\mathcal{L}_N = \left\{\lambda_1 + \cdots + \lambda_N : 0 \leqslant \frac{\lambda_1}{1} \leqslant \frac{\lambda_2}{2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{\lambda_N}{N}\right\}.$$

注意 N 个部分中有些可能是为空; 如果我们忽略掉这些空部分, 我们就能得到一个部分为升序排列的整数分拆. 例如, $1+3+6$ 是长度为 3 的一个阶梯教室分拆, 因为

$$\frac{1}{1} \leqslant \frac{3}{2} \leqslant \frac{6}{3}.$$

我们允许有空部分, 所以 $1+3+6$ 也可以是长度为 4 的阶梯教室分拆 —— 并且有

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{3} \leqslant \frac{6}{4}.$$

另一方面, $1+4+5$ 不是一个长度为 3 的阶梯教室分拆, 因为

$$\frac{4}{2} \not\leqslant \frac{5}{3}.$$

$n=10$ 的长度为 $N=3$ 的阶梯教室分拆的完整集合包含了 10, $1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$, $1+2+7$ 以及 $1+3+6$. 为了得到 $n=10$ 的长度为 $N=4$ 的阶梯教室分拆的集合, 我们只要添加 $1+2+3+4$ 和 $2+3+5$ 到前一个列表中.

习题：

111. 列出 $n=12$ 时, 长度分别为 $N=1,2,3,4$ 的所有阶梯教室分拆. (难度系数：1)
112. 解释为什么 $\mathcal{L}_N$ 总是 $\mathcal{L}_{N+1}$ 的子集. (难度系数：2)
113. 证明阶梯教室分拆总是包含相异的 (非空) 部分. (难度系数：1)

阶梯教室分拆的恒等式由 Bousquet-Mélou和 Eriksson (1997a, 1997b, 1999) 证明, 表述如下：

定理 14 (阶梯教室分拆定理) 对固定长度 N 的阶梯教室, 阶梯教室分拆的数量等于部分小于 $2N$ 的奇分拆数量. 换句话说,

$$p(n|\text{长度为 } N \text{ 的阶梯教室分拆}) = p(n|\text{部分为奇数} < 2N).$$

举个例子, 对长度 $N=3$, 我们已经看到 $n=10$ 的阶梯教室分拆的数量是 7. 正如我们所愿, 10 分成 $\{1,3,5\}$ 中部分的分拆也有 7 个, 它们是：$5+5$, $5+3+1+1$, $5+1+1+1+1+1$, $3+3+3+1$, $3+3+1+1+1+1$, $3+1+1+1+1+1+1+1$ 以及 $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$. 和 Rogers-Ramanujan 恒等式一样, 阶梯教室分拆定理看起来是一个深刻的结果, 因为它还没有一个真正简单的证明.

习题：

114. 目前为止, 你已经看到了许多分拆恒等式. 在你看来, 与之前的恒等式相比, 阶梯教室分拆定理最令人感兴趣的特色是什么？ (难度系数：1)
115. 对 $N=1$, 用双射证明阶梯教室分拆定理. (难度系数：1)
116. 对 $N=2$, 用双射证明阶梯教室分拆定理. (难度系数：2)
117. 对 $N=3$, 尝试用双射证明阶梯教室分拆定理. (难度系数：3)

现在 (我们看看), 在什么意义下这个结果是 Euler 恒等式的加细？好的, Euler 说 n 的相异分拆数量等于 n 的奇分拆数量. (而) 阶梯教室分拆定理是这个结果的"有限版本"：分成小于 $2N$ 的奇分拆数量, 与至多 N 个相异部分并且满足阶梯教室条件的分拆数量相等.

Euler 恒等式是阶梯教室分拆定理当 N 趋向于无穷的极限情况：对一个固定 n, 如果我们选择足够大的 N, 那么部分小于 $2N$ 的奇分拆事实上就是所有奇分拆. 另一方面, 对充分大的 N, n 的阶梯教室分拆必须满足下面这种条件

$$\frac{\lambda_{N-k}}{N-k} \leqslant \frac{\lambda_{N-k+1}}{N-k+1},$$

其中对非零的部分来说, 分子远小于分母, 因此 $\lambda_{N-k} < \lambda_{N-k+1}$ 就已经是不等式成立的充分条件了 (当然, 也是必要条件). 换句话说, 对足够大的 N 来说, n 的长度为 N 的阶梯教室分拆就是 n 的所有相异分拆. 因此, 当 N 趋于无穷时, Euler 恒等式可以从阶梯教室分拆定理推出.

习题:

118. 如果 λ 是分拆 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N$, 其中部分按升序排列, 定义一个新的分拆统计量 $s(\lambda)$ 是交错和 $\lambda_N - \lambda_{N-1} + \lambda_{N-2} - \lambda_{N-3} + \cdots$. 举个例子, 如果 λ 是分拆 $1+3+6+6+7$, 那么 $s(\lambda) = 7-6+6-3+1$. 解释为什么 $s(\lambda)$ 总是非负的数, 并且当 λ 是相异分拆时总是正的. (难度系数: 1)
119. 阶梯教室分拆有一个加细: 对固定正整数 N 和 S, 长度为 N 的阶梯教室分拆 λ 满足 $s(\lambda) = S$ 的数量等于, 恰含 S 个部分且均小于 $2N$ 的奇分拆数量. 当 $N = 5$ 且 $S = 3$ 时, 通过罗列出两类分拆的集合, 验证这个命题对 19 的分拆成立. (难度系数: 1)
120. 当 N 趋于无穷时, 从上面习题的结果中可以推导出 Euler 恒等式的何种加细? (难度系数: 1)
121. (Kim and Yee, 1999) 应用这章开始时介绍的 Sylvester 的构造方法, 尝试找到习题 120 的直接证明. (难度系数: 3)

现在我们将要迈出证明阶梯教室分拆定理的第一步, 这最终会引出一个对任意给定 N 都适用的方法来证明定理. 让我们研究一下分拆 $2+5+11$, 它是一个长度为 3 的阶梯教室分拆, 因为

$$\frac{2}{1} \leqslant \frac{5}{2} \leqslant \frac{11}{3}.$$

观察到: 如果我们从第一个部分中减去 1, 第二个中减去 2, 第三个中减去 3, 剩下的依然是一个阶梯教室分拆: $1+3+8$. 再来一次同样的操作得到 $0+1+5$. 现在我们不能再从第一个部分中减去 1, 同样也不能从第二个部分中减去 2. 但是, 我们能从第三个部分中减去 3, 得到 $0+1+2$. (现在,) 从第三个部分中减去更多的 3 也是不可能的了. 我们就称 $0+1+2$ 是一个长度为 3 的*既约的阶梯教室分拆*.

一般来说, 一个阶梯教室分拆是既约的, 如果对任意 $k = 1, 2, \cdots, N$, 从第 k 个部分中减去 k 就会破坏阶梯教室性质. 长度为 3 的既约的阶梯教室分拆有 6 个:

$$0+0+0, \quad 0+0+1, \quad 0+0+2, \quad 0+1+2, \quad 0+1+3, \quad 0+1+4.$$

对每个长度为 3 的非既约的阶梯教室分拆, 可以通过连续减去 $1+2+3, 0+2+3$ 和 $0+0+3$ 这样的块来将其约简. 反过来, 从任何既约的阶梯教室分拆开始, 连续地加上 $1+2+3$, $0+2+3$ 和 $0+0+3$ 这样的块, 将得到唯一的一个阶梯教室分拆. (为什么?) 既约的阶梯教室分拆 (每个分拆恰对应其中一个既约的) 的权分别是 $0,1,2,3,4,5$. 重复块的权是 $6,5$ 和 3. 因此, 长度为 3 的阶梯教室分拆的生成函数可以如下表示和处理:

$$\begin{aligned}\frac{q^0+q^1+q^2+q^3+q^4+q^5}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^6)} &= \frac{(1-q^6)/(1-q)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^6)} \\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)},\end{aligned}$$

这正是分成小于 6 的奇数部分的生成函数, 就像阶梯教室分拆定理中所断言的.

习题:

122. 列出长度为 2 的 2 个既约的阶梯教室分拆. (难度系数: 1)
123. 列出长度为 4 的 24 个既约的阶梯教室分拆. (难度系数: 1)
124. 解释为什么总是有 $N!$ 个长度为 N 的既约的阶梯教室分拆. (难度系数: 1)
125. 解析为什么给阶梯教室分拆的相应部分加上 $1+2+\cdots+N$, $2+3+\cdots+N$, $3+4+\cdots+N$, 等等这样的块, 总是产生一个新的阶梯教室分拆. 解释为什么每个阶梯教室分拆都可以按这种方式从一个既约的阶梯教室分拆构造出来. (难度系数: 2)
126. 分别对 $N=2$ 和 $N=4$ 时, 使用生成函数证明阶梯教室分拆定理. (难度系数: 2)
127. 为了对一般的 N, 使用既约的分拆证明阶梯教室分拆定理, 请描述下一步需要什么样的结果. (难度系数: 3)
128. 同时用生成函数和双射证明分拆恒等式

$$p(n|\text{奇数部分} < 2N) = p(n|\text{部分} \leqslant 2N, \text{其中} \leqslant N \text{ 的部分相异}).$$

举个例子, 对 $N=3$ 和 $n=10$, 我们知道左边的数目是 7. 右边计数的 7 个分拆是: $6+4$, $6+3+1$, $5+5$, $5+4+1$, $5+3+2$, $4+4+2$ 和 $4+3+2+1$. (见 Yee (2002)) (难度系数: 3)

为阶梯教室分拆定理找一个直接的双射证明看起来似乎很难. Bousquet-Mélou 和 Eriksson(1999) 找到了上一个习题的右边分拆和阶梯教室分拆之间的一个相当复杂的双射:

令 μ 是一个部分 $\leqslant 2N$ 且 $\leqslant N$ 的部分均相异的分拆. 我们将要描述一个算法, 把 μ 中部分从小到大依次取出, 用来逐步构造长度为 N 的阶梯教室分拆 λ. 更确切地说, 被构造出来的是一个 N 乘 N 的整数三角阵 T, 它的列和就是阶梯教室分拆 λ 的部分:

$$\begin{matrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1N} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2N} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{NN} \end{matrix}$$

其中 $\lambda_i = t_{1i} + t_{2i} + \cdots + t_{ii}$. 令 $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_r$, 其中部分按升序排列.

步骤 0: 取出 μ 中所有小于等于 N 的部分, 比如说 $\mu_1, \cdots, \mu_k$. 构造 N 个由 0 和 1 组成的列, 它们构成一个三角阵 $T^{(0)}$, 其中对 $i = 0, 1, \cdots, k-1$, 列 $N-i$ 有 μ_{k-i} 个 1. 所有的 1 被放置在每列的底部; 所有其他项都是 0.

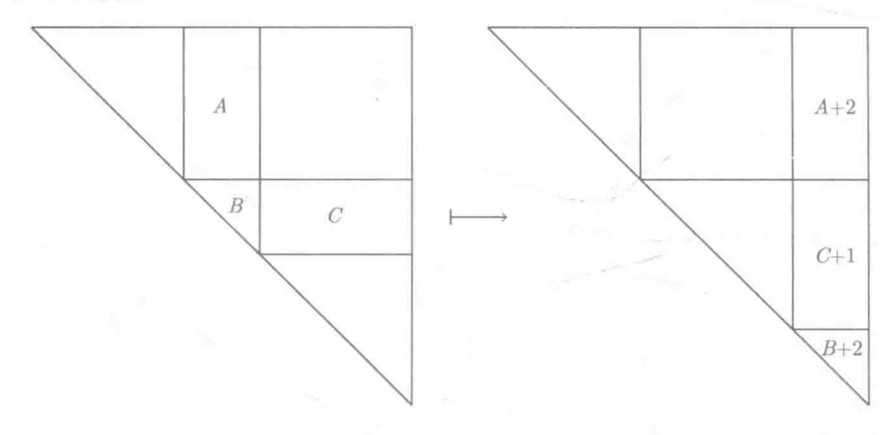
步骤 $s = 1, 2, \cdots, r-k$: 基于上一步所得三角阵 $T^{(s-1)}$ 和紧跟着的部分 μ_{k+s}, 我们如下构造下一个三角阵 $T^{(s)}$. 我们知道存在一个 $i = 1, \cdots, N$ 使得 $\mu_{k+s} = N + i$. 从 $T^{(s-1)}$ 移出第 i 行和第 i 列, 得到一个 $N-1$ 乘 $N-1$ 的三角阵. 按如下方法添加新的第 N 列:

$$t_{NN}^{(s)} = t_{ii}^{(s-1)} + 2, \quad t_{jN}^{(s)} = t_{ji}^{(s-1)} + 2 \ \text{对} j = 1, \cdots, i-1$$

并且

$$t_{jN}^{(s)} = t_{i,j+1}^{(s-1)} + 1 \ \text{对} j = i, \cdots, n-1.$$

如下图所示:



例如, 取 $N=4$ 和 $\mu=1+2+4+5+6+6$. 小于等于 N 的部分是 1, 2 和 4, 所以在步骤 0 我们得到了三角阵

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 \\
 & & & 1
\end{array}$$

因为 μ 中下一个部分是 $\mu_4=5=4+1$, 我们将第 1 行和第 1 列加粗来提示它们将会在步骤 1 中被移走且替换成新的第 4 列 $(\mathbf{0}+1,\mathbf{0}+1,\mathbf{1}+1,\mathbf{0}+2)=(1,1,2,2)$:

$$\begin{array}{cccc}
1 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
 & & 1 & 2 \\
 & & & 2
\end{array}$$

步骤 2 中, 我们使用 $\mu_5=6=4+2$. 因此, 我们现在对第 2 行和第 2 列故计重施, 得到一个新的最后一列 $(\mathbf{1}+2,\mathbf{1}+1,\mathbf{1}+1,\mathbf{1}+2)=(3,2,2,3)$:

$$\begin{array}{cccc}
1 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\
 & & 2 & 2 \\
 & & & 3
\end{array}$$

最后在步骤 3 中, 我们使用 $\mu_6=6=4+2$, 所以我们又一次处理第 2 行和第 2 列, 替换成一个新的最后一列 $(\mathbf{1}+2,\mathbf{2}+1,\mathbf{2}+1,\mathbf{1}+2)=(3,3,3,3)$:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 3 & 3 \\
 & 2 & 2 & 3 \\
 & & 3 & 3 \\
 & & & 3
\end{array}$$

我们最后得到了一个长度 $N=4$ 的阶梯教室分拆 $\lambda=1+3+8+12$. 上面的操作事实上 (还) 是一个双射! 然而, 证明它是双射涉及 Coxeter 群的理论, 超出了本书范围.

我们注意到另外还有一个双射由 Yee (2001) 给出.

习题:

129. 把这个双射作用在 $n=10$ 和 $N=3$ 时的所有分拆, 看看得到怎样的对应. (难度系数: 1)
130. $N=2$ 时这个双射简化为怎样的映射? 证明对这个特殊情况它是对的! (难度系数: 3)

第10章 平面分拆

至今，你一直在研究整数分拆，比如说 $5+4+4+2$，其中部分被写作一行. (因此) 我们有理由称之为一维分拆，这就提示我们还有高维分拆. 在这一章，我们将研究二维分拆，或者说平面分拆.

现在，我们考虑一个左对齐的整数阵列，来替代一行数相加，该阵列中沿着每行和每列都是非增的. 举个例子，4 的 13 个平面分拆是

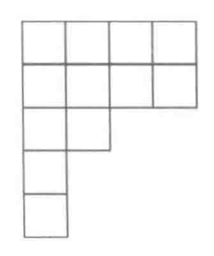
$$
\begin{array}{l}4,\end{array}\quad
\begin{array}{ll}3&1,\end{array}\quad
\begin{array}{l}3,\\1\end{array}\quad
\begin{array}{ll}2&2,\end{array}\quad
\begin{array}{l}2,\\2\end{array}\quad
\begin{array}{lll}2&1&1,\end{array}\quad
\begin{array}{ll}2&1,\\1&\end{array}\quad
\begin{array}{l}2,\\1\\1\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}1&1&1&1,\end{array}\quad
\begin{array}{lll}1&1&1,\\1&&\end{array}\quad
\begin{array}{ll}1&1,\\1&1\end{array}\quad
\begin{array}{ll}1&1,\\1&\\1&\end{array}\quad
\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}
$$

> **本章的重要内容**
>
> - 平面分拆可以表示为三维 Ferrers 板，而后者可被看作六边形的菱形平铺.
> - MacMahon 发现了平面分拆和带限制的平面分拆生成函数的优美公式.

10.1 Ferrers 图和菱形平铺

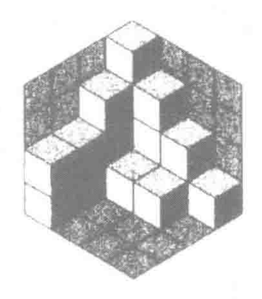
回忆第 3 章，一维分拆有一个图形表示叫做 Ferrers 板. 例如，$4+4+2+1+1$ 的表示是



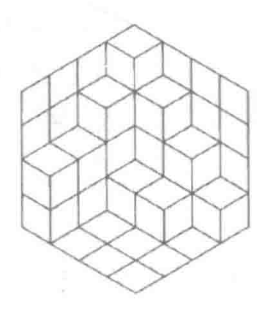
我们看到使用了二维的几何图形来表示我们的一维分拆, 所以用三维的 Ferrers 板来表示平面分拆就不足为奇了. 现在我们在每一个部分的位置上堆砌方块, 而不是逐行并排的放置方格. 因此平面分拆

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & & & \\ 2 & & & \end{matrix}$$

的 3D-Ferrers 板看起来像下图 (用 Excel 生成):

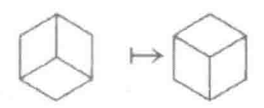


这种表示方式使我们惊奇地观察到, 上面的阵列实际上定义了边长为 4 的正六边形上的单位菱形 (内角按顺序分别是 $60°, 120°, 60°, 120°$) 平铺 (即, 相互不重叠的覆盖). 即是



事实上可以看到, 如果你根据菱形的朝向将它涂上阴影, 那么从边长 $= n$ 的六边形平铺的图像中浮现出的正是一个平面分拆的 3D-Ferrers 板, 其行数、列数, 以及最大部分都 $\leqslant n$.

向 3D-Ferrers 板中添加一个额外的方块对应于旋转一个单位六边形的平铺:



这个平面分拆的“新视角”已经发展成一个独立的课题——菱形平铺理论，(关于该理论) 现在已经有大量研究文献并且产生了丰富的新技巧和该理论自身的未解决问题.

习题:

131. 画出边长为 2 的正六边形中的 20 个菱形平铺. (难度系数: 1)
132. 证明平面分拆到六边形的菱形平铺之间的双射 (如这一节中说描述那样) 是成立的. 提示: 显然每一个平面分拆的 3D-Ferrers 板都产生这样的一个平铺. 这样的平铺可以不对应到一个平面分拆的 3D-Ferrers 板吗? (难度系数: 2)

10.2 MacMahon 的公式

平面分拆具有极其简洁的生成函数. 假设我们记 $pp(n)$ 为 n 的平面分拆的总数. MacMahon 证明了下面这个漂亮的公式:

定理 15 (MacMahon 的平面分拆公式) 平面分拆数量的生成函数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^n}$$

对任意 $|q|<1$.

陆军少校 P. A. MacMahon从研究不变量理论开始他的数学工作, 这是 19 世纪数学家的热门课题之一. 因为分拆在不变量理论中扮演着辅助角色, 所以日后引领他进入了分拆理论研究中. 当他致力于厘清错综复杂的组合 (有序分拆) 和多部分拆 (n 元整数组的分拆), 同时受 Sylvester 研究 Ferrers 图的启发, 他的研究促使他考虑二维或者说平面分拆. 令 MacMahon(MacMahon, 1899) 感到既惊又喜的是, 证明定理 15—— 一个比肩 Euler 生成函数定理 (5.7) 优美程度的公式 —— 成为花费他二十年的巨大挑战 (MacMahon, 1916)!

如果我们只考虑 $pp_k(n)$, 至多 k 行的平面分拆数量, 那么可以得到 MacMahon 平面分拆公式的一个加细. 它的生成函数如下给出

$$\sum_{n=0}^{\infty} pp_k(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^{\min(k,n)}} \tag{10.1}$$

注意到这个结果包括了 $k=1$ 的情况, 即是一维分拆.

令人吃惊的是, 比起第 5 章一维分拆中相对应的定理, 这些关于平面分拆的结果尽管叙述简单, 但却非常难以证明. 事实上, 我们仅在这里对 $k=2$ 的情况证明

(10.1) 就知足了. 为此, 我们定义 $\pi_r(h,j;q)$ 为至多 2 行, 每行至多 r 个部分并且第 1 行第 1 个部分为 h, 第 2 行第 1 个部分为 j 的平面分拆的生成函数.

例如,

$$\pi_3(2,2;q) = q^4 + q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 4q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + q^{11} + q^{12}, \tag{10.2}$$

其中 q^8 的系数 4 计数了平面分拆

22	222	221	211
22	2	21	211

事实上, 利用 $r=1$ 时显然的公式,

$$\pi_1(h,j;q) = q^{h+j}, \tag{10.3}$$

以及递归关系

$$\pi_r(h,j;q) = q^{h+j}\sum_{m=0}^{j}\sum_{n=m}^{h}\pi_{r-1}(n,m;q) \tag{10.4}$$

可以算出每一个 $\pi_r(h,j;q)$.

举个例子, 从 $r=1$ 到 $r=2$ 的步骤如下:

$$\begin{aligned}
\pi_2(h,j;q) &= q^{h+j}\sum_{m=0}^{j}\sum_{n=m}^{h}q^{n+m}\\
&= q^{h+j}\sum_{m=0}^{j}q^m\cdot\frac{q^m-q^{h+1}}{1-q}\\
&= \frac{q^{h+j}}{(1-q)}\left(\frac{1-q^{2j+2}}{1-q^2}-\frac{q^{h+1}(1-q^{j+1})}{(1-q)}\right)\\
&= \frac{q^{h+j}(1-q^{j+1})}{(1-q)(1-q^2)}\left((1+q^{j+1})-q^{h+1}(1+q)\right)\\
&= \frac{q^{h+j}(1-q^{j+1})}{(1-q)(1-q^2)}\left((1-q^{h+1})(1+q)-q(1-q^{j})\right)\\
&= q^{h+j}\left(\begin{bmatrix}h+1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j+1\\1\end{bmatrix}-q\begin{bmatrix}j+1\\2\end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

习题:

133. 证明

$$\pi_3(h,j;q) = q^{h+j}\left(\begin{bmatrix}h+2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j+2\\2\end{bmatrix}-q\begin{bmatrix}h+2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j+2\\3\end{bmatrix}\right).$$

(难度系数: 2)

134. 证明前一个习题的结果满足递归关系 (10.4). (难度系数：2)

10.3 $\pi_r(h,j;q)$ 的公式

沿着 L. Carlitz(1967) 的思路, 现在我们已经万事俱备, 可以对 r 用数学归纳法证明

$$\pi_r(h,j;q)=q^{h+j}\left(\begin{bmatrix}h+r-1\\r-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j+r-1\\r-1\end{bmatrix}\right.\\\left.-q\begin{bmatrix}h+r-1\\r-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j+r-1\\r\end{bmatrix}\right). \tag{10.5}$$

注意到 $r=1$ 和 $r=2$ 的情况在前一节已经证明了. 为了处理归纳的步骤, 我们需要下面的公式 (在第 7 章以习题形式给出):

$$\sum_{j=0}^{N} q^j \begin{bmatrix}M+j\\j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N+M+1\\M+1\end{bmatrix}. \tag{10.6}$$

所以我们假定对小于等于某个给定的 r, 式 (10.5) 都成立. 那么归纳步骤如下进行①:

$$\begin{aligned}
&\pi_{r+1}(h,j;q)\\
=&q^{h+j}\sum_{m=0}^{j}\sum_{n=m}^{h}\pi_r(n,m;q) \quad (\text{由 } (10.4))\\
=&q^{h+j}\sum_{m=0}^{j}\sum_{n=m}^{h}q^{n+m}\left(\begin{bmatrix}n+r-1\\r-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m+r-1\\r-1\end{bmatrix}\right.\\
&\left.-q\begin{bmatrix}n+r-1\\r-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m+r-1\\r\end{bmatrix}\right)\\
=&q^{h+j}\sum_{m=0}^{j}\left(\sum_{n=m}^{h}q^{n+m}\begin{bmatrix}n+r-1\\r-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m+r-1\\r-1\end{bmatrix}\right.\\
&\left.-\sum_{n=m+1}^{h+1}q^{n+m}\begin{bmatrix}m+r-1\\r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n+r-2\\r-2\end{bmatrix}\right)\\
=&q^{h+j}\left(\sum_{m=0}^{j}q^m\begin{bmatrix}m+r-1\\r-1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}r+h\\r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}r+m-1\\r\end{bmatrix}\right)\right.
\end{aligned}$$

① 译注：原文此公式中在 q 的幂次等地方含有几处明显的排版错误, 已修正. 类似地, 下一页 $pp_2(n)$ 的公式第一行中的 q^{-h-j} 已修正为 q^{-j-j}.

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} r+h \\ r-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r+m-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \right) \Bigg) \quad (\text{由 } (10.6)) \\
=& q^{h+j} \left(\begin{bmatrix} r+h \\ r \end{bmatrix} \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \right. \\
&\left. - \begin{bmatrix} r+h \\ r-1 \end{bmatrix} \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r \end{bmatrix} \right) \\
=& q^{h+j} \left(\begin{bmatrix} r+h \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+r \\ r \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} r+h \\ r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r+j \\ r+1 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{由 } (10.6)).
\end{aligned}
$$

这正是我们要证明的 $\pi_{r+1}(h,j;q)$ 的公式. 因此由数学归纳法 (10.5) 得证.

作为一个推论, 我们立刻得出 MacMahon 关于 $pp_2(n)$ 的公式, 即至多 2 行的平面分拆数量:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} pp_2(n) q^n &= \lim_{\substack{r \to \infty \\ j \to \infty}} q^{-j-j} \pi_r(j,j;q) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^2} - q \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^2} \\
&= (1-q) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^2} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^{\min(2,n)}}.
\end{aligned}
$$

习题:

135. 证明 $\pi_2(j,j;q) = q^{2j} \left[\begin{smallmatrix} j+2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$. (难度系数: 2)

136. 更一般地, 证明

$$
\pi_r(j,j;q) = q^{2j} \begin{bmatrix} j+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+r \\ r-1 \end{bmatrix} \Bigg/ \begin{bmatrix} j+r \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

(难度系数: 2)

第 11 章　逐步增长的 Ferrers 板

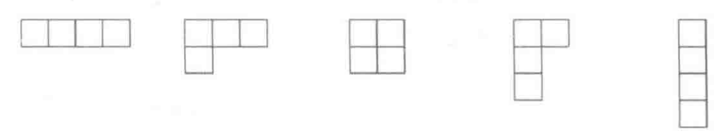
过去的十年里，对组合对象的随机过程的研究热情日益高涨. 这一章, 我们主要讨论随机多米诺骨牌平铺和随机 Ferrers 板的最新进展.

本章的重要内容

- 所有整数分拆的集合可按如下方式赋予一个偏序关系：一个分拆排在另一个之前, 若前者的 Ferrers 板可以通过添加若干方格变成后者的 Ferrers 板.
- 用这种动态的观点考察分拆的逐步增长, 通过记录 Ferrers 板中方格的添加顺序, 我们就得到一种叫做标准表的组合对象.
- 用一个简单的规则控制分拆的随机增长, 那么 Ferrers 板的边缘形状就趋于一个四分之一圆弧. 分拆的这种增长过程事实上与一个叫阿兹特克钻石形的随机多米诺骨牌平铺紧密相关. Jockusch, Propp 和 Shor 的北极圈定理描述了四个四分之一圆弧是怎样在边角的井然有序 (“冻结带”) 与中间的混乱无序 (“温带”) 之间形成一条环状边界 (“北极圈”).

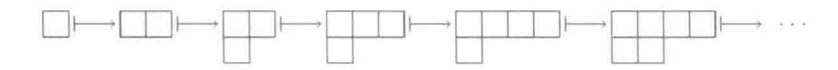
11.1　随 机 分 拆

我们举个例子说明怎样生成 n 的随机分拆, 满足所有分拆等概率生成. 对较小的 n, 比如 $n=4$, 这是容易的. 只需列出所有的分拆:



然后我们随机地取一个介于 1 和 $p(n)$ 之间的数 —— 在这个例子中介于 1 和 5 之间 —— 然后选择对应的分拆. 但是如果 n 很大, 比如说 $n=1000$, 那么分拆数量就太庞大了, 以致于我们不可能在选择前完全列举它们. 那么, 我们如何才能做到按照等概率选择 1000 的分拆呢?

一个看上去比较合理的方案是通过逐步在随机选定的内角处添加方格来生成一个随机的 Ferrers 板. 执行这个过程的一个例子是



但实际上这个随机增长过程并不是等概率地生成所有分拆. 事实上, 相对于其他分拆来说, 某些分拆是非常不可能被生成的. 所以, 随机增长的分拆没能生成均匀随机分拆. 尽管如此, 这仍然值得我们好好研究 —— 因为这诞生了比原始问题更加令人兴奋的数学. 这章将以随机多米诺骨牌平铺研究中一个十分令人惊叹的, 被称作*北极圈定理*的近期结果作为总结, 该定理中逐步增长的 Ferrers 板发挥了重要作用.

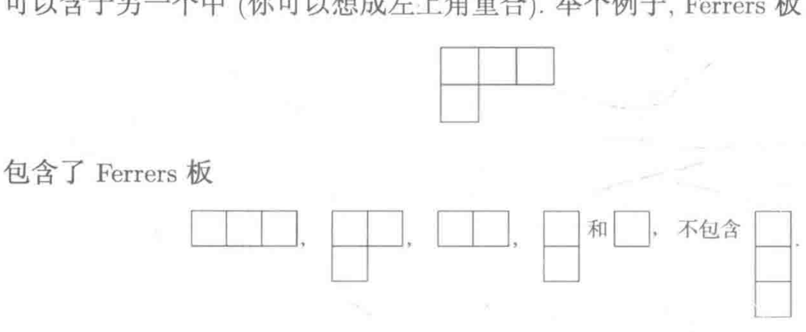
习题:

137. 思考其他的办法来处理等概率随机生成大数的分拆这个问题. (难度系数: 3)

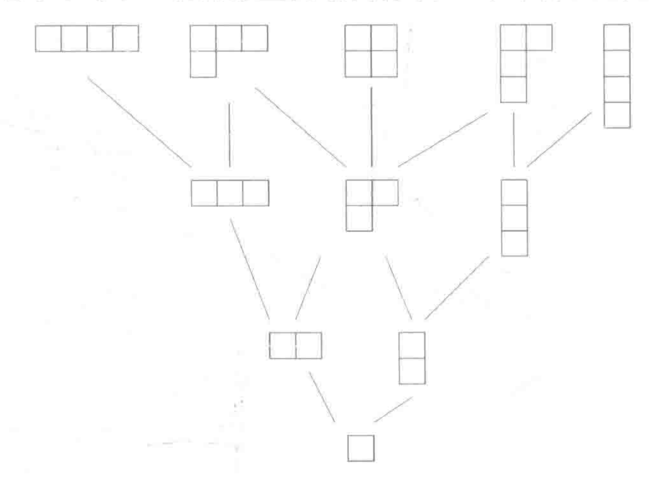
11.2　分拆偏序集

我们先来简短讨论一下全序集和偏序集. 非负整数集上有一个关于大小的全序关系: $0 < 1 < 2 < 3 \cdots$. 任何数都可以与任何另外一个数相比较, 并且这个比较总能得出一个数比另外一个大. 对于平面上的整点, 我们可以尝试类似地定义一个序关系, 比如说: $(a,b) \preceq (m,n)$ 当且仅当 $a \leqslant m$ 且 $b \leqslant n$, 即, 如果按坐标逐位比较结果是一致的. 举个例子, 在这种序关系下, 我们有 $(0,0) \preceq (1,0) \preceq (1,1) \preceq (1,2)$. 但是如果我们比较 $(1,0)$ 和 $(0,1)$, 那么在序关系中, 没有哪个点能排到另一个点前面. 我们说平面上的整点集合关于 $\preceq$ 构成了*偏序关系*, 因为只有部分整点对可以比较.

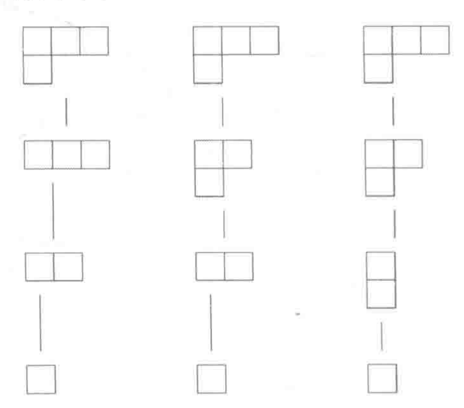
整数分拆中有几个有用的偏序关系. 我们接下来要描述所谓的*通常序*. 在 Ferrers 板上最容易定义它. 在通常序中, 一个 Ferrers 板排在另一个之前, 当且仅当它可以含于另一个中 (你可以想成左上角重合). 举个例子, Ferrers 板



一个具有偏序关系的集合通常简称为*偏序集*. 偏序集有一个方便的图形表示, 称为偏序集的 *Hasse* 图. 我们按照两个简单的规则来画 Hasse 图. 首先, 较大的元素画在较小的元素之上. 其次, 若两个元素可以比较且不存在其他元素介于它们二者之间, 就用一条线连接这两个元素. 重点是不要画出不必要的线. 如果两个元素可比较, 那么图中就存在一条路径从较小的元素向上直到较大的元素. 下面这个 Hasse 图对应着小于等于 4 的所有整数的分拆关于通常序构成的偏序集:



在整数分拆通常序的 Hasse 图中, Ferrers 板 λ 和 μ 之间有一条线, 当且仅当我们可以在 λ 的一个内角处添加一个方格来得到 μ(见第 3 章). 因此, 从最底部元素向上通往分拆 λ 的路径是每次添加一个方格来构造 λ 的 Ferrers 板的完整过程. 举个例子, 有三个路径得到 $3+1$:



我们记分拆的通常序为 $\preceq$. 因此上面最右边的路径表明 $1 \preceq 1+1 \preceq 2+1 \preceq 3+1$. 因为 $1+1+1$ 按照通常序不小于 $3+1$, 所以我们写作 $1+1+1 \not\preceq 3+1$.

习题:

138. 把通常序的 Hasse 图扩充到 5 的分拆. (难度系数: 1)
139. 刻画那些与底部元素只有唯一一条路径连接的分拆. (难度系数: 2)
140. 记 λ' 和 μ' 为 λ 和 μ 的共轭分拆. 证明如果 $\lambda \preceq \mu$, 那么 $\lambda' \preceq \mu'$. (难度系数: 2)
141. 尝试定义分拆的一个全序关系 (提示: 用字典序). 对所有不超过 4 的整数的分拆画出关于这个序关系的 Hasse 图. (难度系数: 2)
142. 另一个比较常用的序是*优势序*, 记作 $\trianglelefteq$. 将分拆的部分递减排列, 即 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$, 其中 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$(包含了无穷多个 0-部分). 那么优势序定义为 $\lambda \trianglelefteq \mu$ 当且仅当下列不等式全部成立:

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1, \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \text{等等}.$$

对所有不超过 5 的整数的分拆画出优势序的 Hasse 图. (难度系数: 1)

143. 如果 λ 按通常序比 μ 小, 那么是否按优势序也一定是 λ 比 μ 小? 反过来对吗(难度系数: 2)
144. 证明共轭变换逆转了同一个数的两个分拆之间的优势序, 即, 如果 $\lambda \trianglelefteq \mu$, 那么 $\mu' \trianglelefteq \lambda'$. (难度系数: 2)

11.3 钩长公式

若每次随机添加一个方格, 这样得到的一个典型 Ferrers 板看起来会是什么样子呢? 这便是这一章我们想要探讨一下的. 为此我们需要知道: 有多少种增长路径可以自底而上到达一个给定的 Ferrers 板. 每一条这样的路径都可以这样描述, 根据其何时被添加至 Ferrers 板来给板上的每一个方格编号. 因此, 上一节末尾的三条路径可分别被描述为

1	2	3
4		

,

1	2	4
3		

, 以及

1	3	4
2		

.

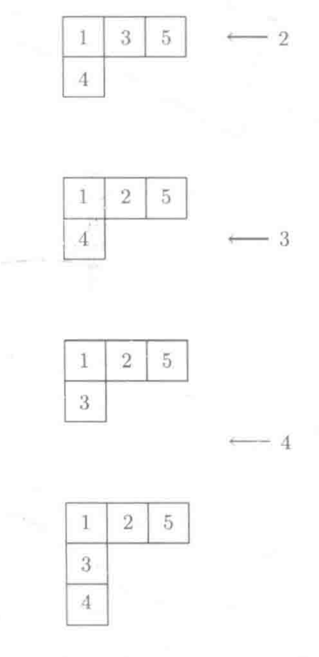
这样得到的对象是在所有方格中填入 1 直到方格总数的 Ferrers 板, 满足每行每列的数字都递增. 这些数表称为*标准表*(或称为*标准 Young 表*), 它们是在数学的多个分支中都非常重要的研究对象. 通过在分拆通常序的 Hasse 图中计数从底部向上直到第 n 层的路径, 我们可以得出当 $n = 1, 2, 3, 4$ 时, n 个方格的标准表的个数

分别是 1, 2, 4, 10.

习题:

145. 计算 5 个方格的标准表个数. (难度系数: 1)

146. 一个称为行插入的操作常被用来向一个标准表 (已填入的数集允许有空隙) 中插入一个新的数 N. 行插入如下执行: 如果 N 大于第一行最右端的数, 那么就在第一行扩充一个填 N 的方格. 否则第一行必然包含一个最小的数 N' 大于 N. 用 N 替代 N', 然后迭代地执行在第二行插入 N' 的操作. 下面是一个行插入的例子:



说明为什么行插入总是得到一个新的标准表 (已填入的数集允许有空隙). (难度系数: 2)

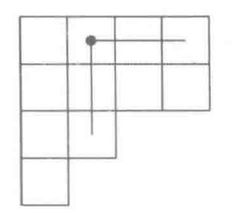
147. 说明行插入怎样可以从任意一个角上的数开始反向执行. (难度系数: 2)

148. 记 n 个方格的标准表的数量为 s_n. 证明 s_n 满足递归关系: 对 $n \geqslant 2$, $s_n = s_{n-1} + (n-1)s_{n-2}$, 并且 $s_1 = s_0 = 1$. 提示: 第一项计数了 n 所在方格位于最左列 (底部) 的标准表. 第二项计数了 n 不在最左列的标准表. 对这种情况, 在 n 的左边紧邻一列的底部存在某个别的数; 从这个数开始, 反向执行行插入. (难度系数: 3)

149. 解释为什么同样的递归关系也可以给出集合$\{1, 2, \cdots, n\}$ 分成大小为 1 或 2

的块的分拆数量. 例如, 对于 $n=3$, 有四个相关的集合分拆 $\{12,3\}$, $\{13,2\}$, $\{1,23\}$ 以及 $\{1,2,3\}$. (难度系数: 2)

对给定形状 λ 的标准表数量有一个著名的计算公式. 它被称为**钩长公式**, 这个名字的由来接下来将揭晓. Ferrers 板中的任意一个方格决定一个**钩**, 它包含了这个方格, 其右侧的所有方格及其下方的所有方格. 下图展示了被标记方格的钩:



钩长是钩中的方格数量. 我们可以将一个图形的所有钩长记录在对应的方格中; 例如:

4	2	1
1		

以及

7	5	3	2
6	4	2	1
3	1		
1			

形状为 λ 的标准表数量记为 f^{λ}. 从之前的讨论, 我们知道 $f^{3+1}=3$. Frame, Robinson 和 Thrall 的钩长公式表明

$$f^{\lambda}=\frac{|\lambda|!}{\prod\limits_{ij\in\lambda} h_{ij}^{\lambda}}, \tag{11.1}$$

其中 h_{ij}^{λ} 是位于 λ 的第 i 行和第 j 列的方格所对应的钩长. 乘积遍历 Ferrers 板上所有的方格. 因此, 对于 $\lambda=3+1$, 我们得到

$$f^{3+1}=\frac{4!}{4\cdot 2\cdot 1\cdot 1}=\frac{24}{8}=3,$$

这正是我们已经知道的答案.

钩长公式有许多证明, 尽管没有哪个证明真的适合在这本书中讨论. 一个颇有启发性的方式来 “看出” 这个公式是考虑所有 $|\lambda|!$ 种在方格中填数的方法, 接着舍弃掉那些在某个方格 ij 中没填它对应的钩中最小数的填法. 对每一个方格 ij, 填入它的数为其所对应钩中最小的概率是 $1/h_{ij}^{\lambda}$. 因此, 如果这些概率都是相互

独立的, 那么钩长公式就成立了. Sagan (1991) 顺着这个思路给出了一个严格的证明.

有了这个非凡的公式, 我们现在能够推导出一些有趣的特殊情况的显式表达了. 举个例子, 阶梯形的钩长是

<table>
<tr><td>$2\ell-1$</td><td>$\ddots$</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\ddots$</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
</table>

那么钩长公式马上告诉我们, 这种阶梯形的标准表数量是

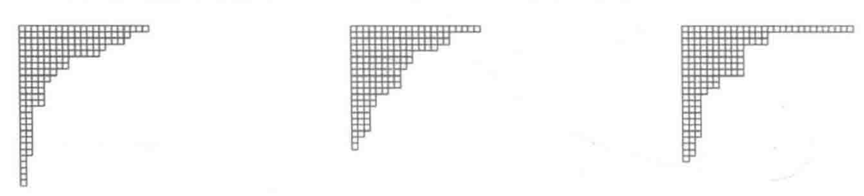
$$f^{\ell+(\ell-1)+\cdots+1}=\frac{(\ell(\ell+1)/2)!}{1^{\ell}\cdot 3^{\ell-1}\cdot 5^{\ell-2}\cdots(2\ell-1)^{1}}.$$

习题:

150. 用钩长公式计算所有含 6 个方格的图形的标准表数量. (难度系数: 1)
151. 对从 1 到 6 的所有 n, 哪一种 n 个方格的图形可以通过最多的方式增长得到? (难度系数: 1)
152. 对 $n=1,2,3,4,5$, 计算 $\sum_{\lambda\vdash n}(f^{\lambda})^2$ 并提出猜想 ($\lambda\vdash n$ 是指 λ 是 n 的分拆). (难度系数: 2)
153. 对至多两行的图形证明钩长公式. 你可以用数学归纳法. 有两种情况需要考虑: 要么该图形只有一个外角, 像⊞, 那么在增长路径上排在该图形之前的必定是⊞. 否则该图形就有两个外角, 像⊞, 此时增长路径数为到达两个可能的前序图形⊞和⊞的路径数之和. 你必须证明钩长公式满足同样的递归关系. (难度系数: 2)
154. 用钩长公式证明两行等长为 m 这种图形的标准表数量是 Catalan 数 C_m(见第 3 章). (难度系数: 2)
155. 找到上一题中的标准表与可完全置入高为 m 的阶梯形的 Ferrers 板 (见第 3 章) 之间的一个双射. (难度系数: 3)

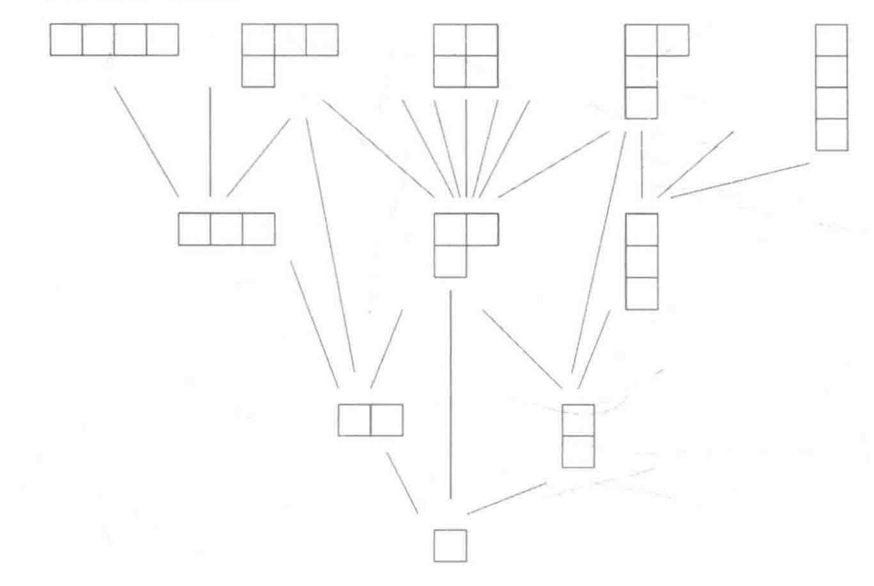
11.4　随机增长的 Ferrers 板

我们现在来测试一下在本章开篇提到的生成随机 Ferrers 板的操作: 在每一步, 随机选择一个内角并填入一个新方格 (我们称这种随机过程为类型 I). 当方格数量 n 增大时, 某个特定的板出现的概率趋于 0. 不过是否有一种典型的整体形状呢? 下面是这个随机增长过程对 $n = 150$ 的三次不同执行结果.

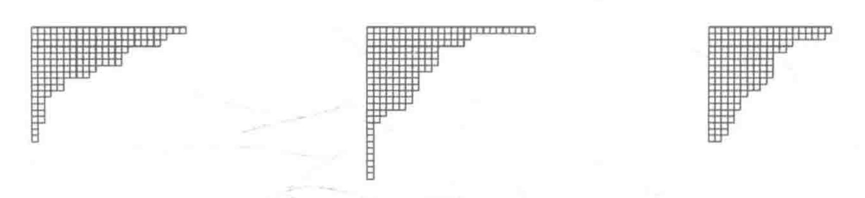


尽管上面的三个样本细节上差别很大, 但他们具有的共性是轮廓都是略微凹的. 事实上, Rost (1981) 证明了当 n 增大时, 轮廓趋于一个抛物线型 (这是在概率的意义上, 我们稍后会在这章更精确地讨论它).

另一种使增长过程随机化的方法 (我们称为类型 II)是在每一步, 对每个内角都抛一次硬币, 然后在结果为反面的所有内角处填入新方格. 这个操作得到了一个新的随机路径图, 相当于在通常序的 Hasse 图中补充一些新的边, 对应于一次添加多于一个方格的可能性:



三次执行类型 II 的随机增长过程直到已填充 (至少)150 个方格, 给出了如下结果:



这些样本也许看起来和类型 I 中的相似, 但是可以想象得出类型 II 中的或许普遍厚一些. Jockusch, Propp和 Shor在 1998 年证明了类型 II 的轮廓大致趋向于变成**四分之一圆**的形状. 我们在本章稍后将会看到他们这个叫做**北极圈定理** 的结果. Pittel (1997) 做了相关的研究.

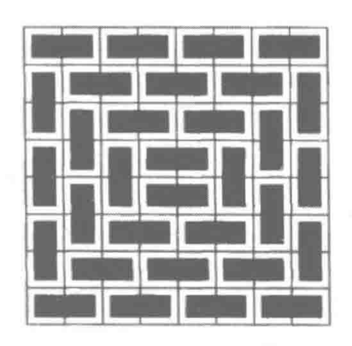
习题:

156. 为下列事实的合理性给出一个启发性的解释：一个随机增长的 Ferrers 板 (类型 I 或类型 II) 的典型形状是凹的而不是凸的. (难度系数：2)
157. 尽管 Ferrers 板是二维的, 也可以按下面的方式来一维地刻画它们的增长：考虑一个由充分多的 0 后面跟着充分多的 1 所组成的序列. 在每一步, 选择该序列中出现的某一对 01, 将其替换为 10(这是Rost 研究时采用的模型). 解释这个过程与逐步增长的 Ferrers 板之间的联系. (难度系数：2)
158. 为 Ferrers 板的随机增长写一个计算机程序. (这很容易!) 尝试修改随机性. 比如说, 在类型 II 的过程中采用偏性掷币是否会影响结果? 或者, 在类型 I 的过程中, 如果属于较长行的内角被选中的概率降低, 会发生什么? (难度系数：3)

11.5 多米诺骨牌平铺

为了能够从前几页讨论的随机 Ferrers 板过渡到下一节的北极圈定理, 我们需要插入一段关于多米诺骨牌平铺的讨论. 当你完成了一个拼图游戏, (这意味着) 你已将每一块拼图合理安排从而组合成了一幅, 比如说, 长方形的完整图画. 如果我们忽略拼图上的装饰画, 那么我们就得到了被称为一个区域 (即这里的长方形) 的**平铺**这样一个数学概念. 因此, 一个平铺是指的用相互不重叠的块 (称为**磁贴**)覆盖一个区域.

被研究得特别多的是用多米诺骨牌 (1×2 的长方形) 进行平铺. 显然, 一个 2×2 的正方形有两种多米诺骨牌平铺, 因为两个多米诺骨牌要么横着放⊟, 要么竖着放◫. 对于一个国际象棋棋盘 (8×8), 总共有 12988816 个多米诺骨牌平铺! 下图是国际象棋棋盘的一种可能的多米诺骨牌平铺:



多米诺骨牌平铺在统计物理学中 (在那里多米诺骨牌被称为**二聚物**, 意思是双原子分子) 扮演了重要角色. 在 20 世纪 60 年代早期, 物理学家Kasteleyn, Fisher 和 Temperley 发现对一个具有任意偶数边长, 比如说 $2m \times 2n$ 的长方形棋盘, 它的多米诺骨牌平铺的数量是

$$N(n,m) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}\left(4\cos^2\frac{\pi j}{2n+1} + 4\cos^2\frac{\pi k}{2m+1}\right). \tag{11.2}$$

这个怪异的公式掩盖了这些数字非常漂亮的一些性质. 举个例子, 考虑方形棋盘 ($m = n$) 这一特殊情况, 多米诺骨牌平铺的数量总是 2 的 n 次方乘一个奇数平方. 前五个数, 从 $N(0,0)$ 到 $N(4,4)$ 因此可写作:

$$1, 2 = 2^1,\quad 36 = 2^2 3^2,\quad 6728 = 2^3 29^2,\quad 12988816 = 2^4 901^2.$$

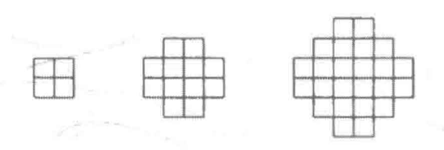
习题:

159. 用 Kasteleyn, Fisher 和 Temperley 的公式证明 $N(2,2) = 36$. (难度系数: 1)
160. 一个老问题: 为什么标准 8×8 棋盘在挖掉对角处两个方格后不能被多米诺骨牌平铺? (难度系数: 2)
161. 证明从标准棋盘中任意挖掉一个黑方格和一个白方格, 剩下的部分始终可以被多米诺骨牌平铺. (难度系数: 2)
162. 证明任何阶梯形 Ferrers 板都不能被多米诺骨牌平铺. (难度系数: 2)
163. 找到一个充要条件来刻画何时给定的一个Ferrers 板可以被多米诺骨牌平铺. (难度系数: 3)

11.6　北极圈定理

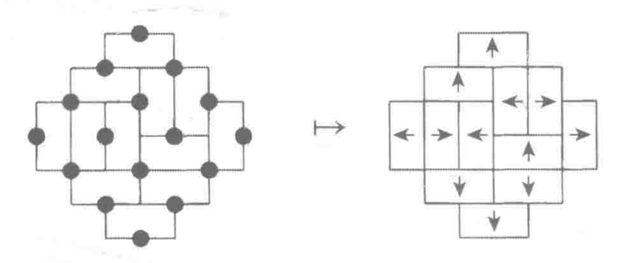
一个**阿兹特克钻石**是指的将四个等高的阶梯形沿直角边粘起来所形成的区域.

尺寸为 1, 2, 3 的阿兹特克钻石如下：



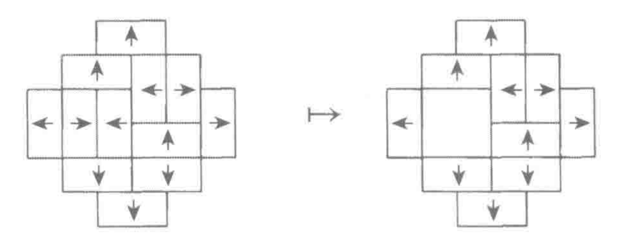
很明显尺寸为 1 的阿兹特克钻石有两种多米诺骨牌平铺：和. 类似地, 对尺寸为 2 的阿兹特克钻石, 容易构造出它所有的多米诺骨牌平铺并核实总共有八种. 一般而言, 尺寸为 m 的阿兹特克钻石有 $2^{m(m+1)/2}$种多米诺骨牌平铺. 这个公式是由四位彼时风华正茂的数学家：Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen和 Jim Propp于 1992 年发现的. 由此看来, 这个公式比看起来更为自然的正方形棋盘的相应公式 (在那里 2 的某个方幂要乘以一个奇数平方) 更为简单.

给定一个阿兹特克钻石的多米诺骨牌平铺, 我们将为每个磁贴分配一个箭头. (首先) 在该钻石最北那条边的中点处标记一个小圆点. 接下来, 在该阿兹特克钻石中所有从第一个小圆点开始经过偶数步向下和向两侧移动便能到达的点处也放上小圆点. 现在每个多米诺骨牌在它的两条长边中, 恰有一条的中点处放置了小圆点. (最后) 在每个多米诺骨牌中放置一个箭头, 指向长边上的小圆点.

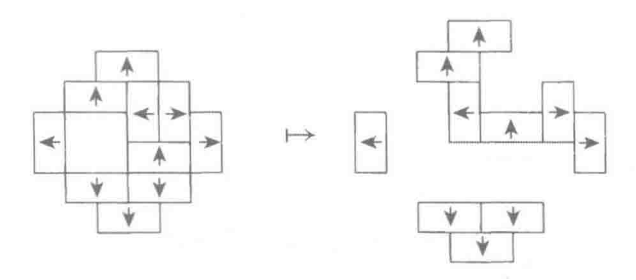


注意到共用一条长边的两个多米诺骨牌所含箭头必然指向相反方向. 如果两个箭头相向而指, 则称对应的两个多米诺骨牌构成一个*坏区*, 否则称为一个*好区*. 在为阿兹特克钻石生成一个随机的多米诺骨牌平铺这个随机过程中, 这两种区起到了重要作用. 该过程被称为*迭代洗牌*. 从空的钻石开始, 在该过程的每一步, 一个阿兹特克钻石的多米诺骨牌平铺都被扩充为比它大一个尺寸的阿兹特克钻石的平铺.

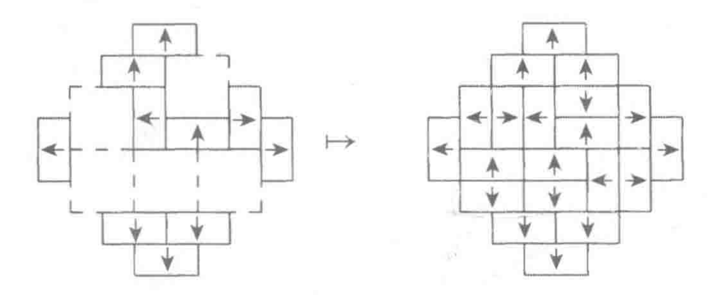
洗牌. 每步都由三个阶段组成. 首先, 去除所有的坏区.



其次, 每个多米诺骨牌按其箭头所指方向滑动一步.



最后, 为了铺满大一个尺寸的阿兹特克钻石, 在所有 2×2 的洞中放置一个好区 (方向随机, 要么横向, 要么纵向). (更大的空隙总是可以唯一地被分成 2×2 的洞.) 在本例中, 有五个洞需要填充.



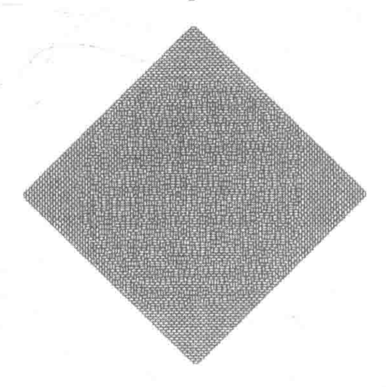
可以证明洗牌总是可行的, 且任意平铺都能通过洗牌得到.

习题:

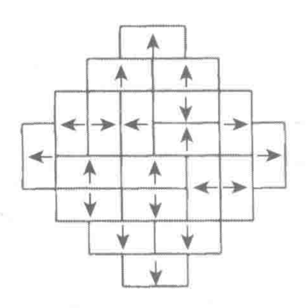
164. 证明在滑动阶段后不会出现磁贴重叠的情况. (难度系数: 2)
165. 在滑动阶段后, 我们怎么知道箭头的指向符合小圆点的位置呢? (难度系数: 2)
166. "更大的空隙总是可以唯一地被分成 2×2 的洞" 为什么成立? (难度系数: 2)
167. 洗牌是可逆的. 也就是说, 从阿兹特克钻石的任一个多米诺骨牌平铺开始, 我们可以去掉好区并将所有磁贴按箭头所指反方向滑动, 最后插入坏区从而得到小一个尺寸的阿兹特克钻石的一个平铺. 试着将上述结果拆成需要逐一验证的小结果, 得到这个命题的证明梗概. (难度系数: 3)
168. 基于前面给出的关于洗牌过程的信息, 证明该过程在进行 m 步后以相等概率 $2^{-m(m+1)/2}$ 生成随机的多米诺骨牌平铺. (因此, 尺寸为 m 的阿兹特克钻石有 $2^{m(m+1)/2}$ 种多米诺骨牌平铺.) (难度系数: 3)
169. 分别对尺寸为 $0, 1, 2$ 的阿兹特克钻石, 画出所有平铺的偏序集, 其中偏序关系为: 较大的平铺能从较小的平铺通过迭代洗牌得到. (难度系数: 1)

在执行迭代洗牌后, 某个非常特定的图案将会呈现出来. 这里有一个尺寸为 50 的阿兹特克钻石的随机多米诺骨牌平铺样本 (来自 Jim Propp 的网页)[①]:

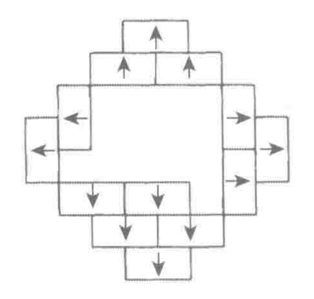
http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/9801/9801068.pdf.



我们看到四个井然有序的区域包裹着一圈混沌般分布的磁贴. Jim Propp 将这些井然有序的区域命名为*北极*(或者*冻结带*), 称中间的混沌区域为*温带*, 两个区域的分界线则称为*北极圈*. 更准确地说, 北面的北极区是由在北边那些所含箭头指向北的磁贴所组成的连通分支, 另外三个北极区类似. 所以下面这个阿兹特克钻石的多米诺骨牌平铺



所含北极区为

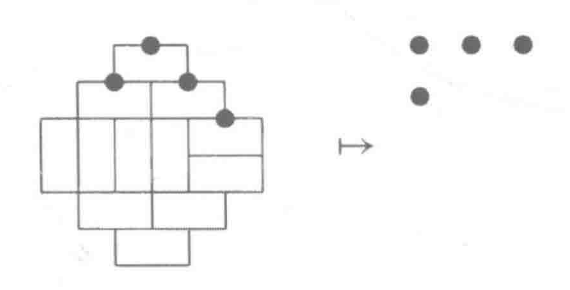


①译注: 原文中的链接已失效, 该图片所在原始文章的链接为http://arxiv.org/abs/math/9801068.

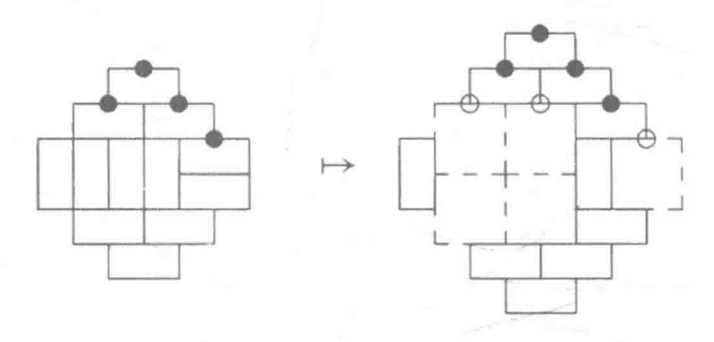
我们现在可以陈述北极圈定理了.

定理 16 (北极圈定理)　当 m 趋向无穷大时, 尺寸为 m 的阿兹特克钻石中所含北极圈严重偏离圆形的多米诺骨牌平铺所占比例趋于零.

关于这个令人称奇的北极圈定理的更多细节, 读者可以参考 1995 年 Jockusch, Propp和 Shor那篇原文. 我们在这里介绍一下基本思路, 将北极圈定理与我们之前讨论过的 (类型 II)随机增长的 Ferrers 板 —— 我们事实上更愿意用 Ferrers 图 —— 联系起来. 取出北面北极区的那些小圆点, 将所得图倾斜 45° 角, 一个 Ferrers 图出现了!



我们来看看在洗牌的时候北面的北极区发生了什么. 第一, 没有哪个位于北极的多米诺骨牌属于坏区, 所以在清除阶段它们都被保留了下来. 第二, 所有北面北极区的多米诺骨牌在滑动阶段统一向北滑动 (而处于分界线的多米诺骨牌不向北滑), 从而保留了 Ferrers 图的形状. 第三, 北面的北极区能够增长的唯一方法是在分界线上放置横向的好区. 分界线上的洞恰好出现在 Ferrers 图的内角处 (下图中以空心圈标记), 并且对每一个内角而言, 新放置的好区有二分之一的机率是横向的, 从而给北面区域新添一个多米诺骨牌, 用一个新的小圆点填上这个内角.



上述论证表明, 四个北极区域的分界线将勾勒出适当倾斜后的 (类型 II) 随机增长 Ferrers 图的外廓, 而根据 Jockusch, Propp和 Shor的结果, 它将趋于四分之一圆弧. 四个四分之一圆弧在一起便形成了北极圈!

习题:

170. 从中间的一个小洞开始, 重复地随机去掉该洞边界角上的方格, 以这种方式探索不同的法则来控制挖空方形板的过程. 有没有哪种法则看起来能产生一个环形洞呢? 或者一个正方形洞? (难度系数: 3)

第12章 沉 思 集

在这最后一章, 我们希望能激励你继续深入学习整数分拆!

本章的重要内容

- 我们遗漏了什么?
- 去哪里展开新的探索?
- 在哪里可以了解分拆的历史?
- 还存在尚未解决的问题吗?

12.1 我们遗漏了什么?

此处已经到了我们的分拆理论之旅的尾声了. 伴随着讲述这个历史悠久的数学分支中一些引人入胜之处, 我们时常在暗示说, 这还仅仅只是 (分拆理论的) 开端. 许多读者可能想知道接下来要研究什么?

$p(n)$ 的精确公式

好吧, 我们现在还未曾告诉你完整的、精确的 $p(n)$ 的公式, 实际上, 它是

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(n)k^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{24}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x-\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x=n},$$

其中 $A_k(n)$ 是一个有显式表达的 $24k$ 次单位根的有限和. 正如你所期待的那样! (只是开玩笑.)

为了证明这样的一个公式, 必须使用复变函数论中相当精细的技巧. 所有这类工作都严重依赖于模形式和模函数理论. 如果想要深入学习, 我们推荐G. E. Andrews(1998) 的 *The Theory of Partitions* 或者 M. I. Knopp (2008) 的 *Modular Functions in Analytic Number Theory.*

基本超几何级数

你也已经看过多种多样的公式形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^n)^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n},$$

或者是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}.$$

这些都是在对基本超几何级数的研究中更一般定理的特例. 例如, 上面第一个公式是下式的特例

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)(a-q)\cdots(a-q^{n-1})(b-1)(b-q)\cdots(b-q^{n-1})c^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)(1-c)(1-cq)\cdots(1-cq^{n-1})}$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-caq^n)(1-cbq^n)}{(1-cq^n)(1-abcq^n)}.$$

想要深入了解这个课题的内容, 最完整的资料来源是 G. Gasper 和 M. Rahman (1990) 的 *Basic Hypergeometric Series*. 基本超几何级数中一些涉及分拆理论的方面可以从 G. E. Andrews (1986) 的小册子 *q-Series*中找到.

分拆出现在其他领域

分拆理论也以一种不可思议的方式出现在组合和代数问题中. 举个例子, q 是素数的幂, q 个元素的有限域上定义的 n 维线性空间的 k 维子空间有多少个? 答案是

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

即第 7 章[①]中遇到的 Gauss 多项式. 这个 (问题) 以及其他许多与组合和代数相关的问题都在 *Theory of Partition*(前面提到过的) 一书的第 9 章和第 13 章有讨论. 至于更加进阶的课题, 读者可以参考 I. G. Macdonald (1998) 的 *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, B. Sagan (1991) 的 *The Symmetric Group*以及获奖的现代经典作品 R. P. Stanley (1996, 1999) 的 *Enumerative Combinatorics*.

分拆理论最令人惊叹的其中一个方面是它在一些看似不相关的领域中的应用. 上面引用的书 *q-Series*的完整题目是 *q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra*. 和这

① 译注: 原书误引为第 6 章.

个巴洛克风格的题目所清楚表达出来的一样, 整数分拆和各种各样的领域联系在一起.

Henry Mann因为证明了 Artin 猜想而获得了美国数学会颁发的 Cole 奖. 然而, 如果你查询科学引文索引, 你会发现他和 D. R. Whitney(1947) 合作的论文 *On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other* 引用次数远高于他的获奖论文. 这篇论文的唯一目标就是在非参数统计中, 使用组合构造来得到 Wilcoxon 分布的矩, 而这种构造等价于被 Gauss 多项式所计数的那些整数分拆.

12.2　去哪里展开新的探索?

明显地, 上一节引用的文献都能引领我们去研究远超这本书所提供的引论内容. 然而, 还有一个研究分拆的途径我们尚未提及: 计算机. 着实令人激动的近期发展之一就是将计算机代数运用到分拆研究中.

Omega

其中比较好用的软件包是G. E. Andrews, P. Paule和 A. Riese(2001) 开发的 Omega, 可以在下述地址中下载到

`http://www.risc.uni-linz.ac.at/`

这个软件包基于一个事实: 对于部分满足复杂不等式约束的分拆, 有一个算法来计算它的生成函数. 举个例子, 记 $\Delta(n)$ 为周长为 n 的两两不全等的整数边长三角形的个数. 那么,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta(n)q^n=\sum_{\substack{a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant 0\\ a_2+a_3>a_1}}q^{a_1+a_2+a_3}.$$

如果将对于部分的这些约束条件输入到 Omega 中, Omega 会立刻输出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta(n)q^n=\frac{q^3}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}.$$

当然, 没有 Omega 你也可以推导出这个公式; 但是 Omega(的优点) 是可以自动计算结果的.

另一个不错的例子是 1999 年普特南数学竞赛的问题 B3, 这个问题本质上可以归结到寻找下式的封闭解

$$S(x,y)=\sum_{\substack{m,n\geqslant 0\\ 2m\geqslant n\\ 2n\geqslant m}}x^my^n,\qquad |x|<1,|y|<1.$$

Omega 会马上告诉你

$$S(x,y)=\frac{1+xy+x^2y^2}{(1-x^2y)(1-y^2x)}.$$

12.3 在哪里可以了解分拆的历史?

正如我们已经表明的, Euler 在 18 世纪拉开了研究整数分拆的帷幕. 虽然不得编辑好评, 但如果想要完整地了解 1920 年以前的分拆理论发展史, 最好的读物是 L. E. Dickson(2013) 的 *History of the Theory of Numbers, Vol. II* 的第 3 章.

还有一本不太完整但更适合休闲阅读的书即将出版, Robin Wilson 的 *History of Combinatorics.*

除此之外, 过去几十年间还有很多关于这个领域各种课题的综述, 特别推荐, H. L. Alder(1969) 的 *Partition Identities – from Euler to the Present* 以及G. E. Andrews (1972) 的 *Partition Identities.*

最后, 如果不提印度天才 Srinivasa Ramanujan(2000) 叹为观止的工作的话, 分拆的历史就不算完整. 还有与之相关的 Bruce Berndt(1985,1989,1991,1994,1998) 所著的五卷评注.

12.4 还存在尚未解决的问题吗?

未解决的问题还有很多. 在 4.3 节, 我们已经展示了 Alder 猜想. 我们再列举三个仅需要之前章节知识的问题.

Borwein 问题

记 $B_e(N;n)$(相应地, $B_o(N;n)$) 为 n 分成偶数个 (相应的, 奇数个) 相异部分的分拆个数, 其中部分小于 $3N$ 且不是 3 的倍数. 证明, 如果 n 是 3 的倍数, 那么对所有正整数 N 和 n,

$$B_e(N;n)-B_o(N;n)$$

是非负的. 反之则非正.

这个猜想的背景知识可以在 G. E. Andrews (1995) 的论文 *On a conjecture of Peter Borwein* 中找到.

Leibniz 问题

鉴于对 $n \leqslant 6$, $p(n)$ 是素数 (假定 1 是素数) 的事实, Leibniz 曾断言 $p(n)$ 总是素数. 当然, $p(7) = 15$, 所以我们要修改这个断言为下面的问题: 证明 $p(n)$ 对无穷多个 n 是素数. Ono (2000) 证明了每一个素数都至少整除一个 $p(n)$ 的值.

$p(n)$ 的奇偶性

最近几年, Ken Ono 关于 $p(n)$ 的整除性质得到了引人注目的一些发现, 参考 Ono (2000). 许多问题依旧悬而未决. 例如证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{m | m \leqslant n \text{且} p(m) \text{是偶数}\}|}{n} = \frac{1}{2}.$$

换句话说, 证明大约一半的 $p(n)$ 值是偶数.

既然你已经读完这本书了, 我们鼓励你去攻克一个公开问题. 阅读是有趣的, 但研究更加有趣.

附录 A　无穷级数和无穷乘积收敛性

这本书中考虑的所有无穷级数都可以用微积分中两种标准判别法证明其收敛性:

比式判别法 (D'Alembert 判别法)

无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 如果 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

根式判别法 (Cauchy 判别法)

无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 如果 $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$.

举个例子,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

当 $|q| < 1$ 时绝对收敛. 我们应用比式判别法证明:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n+1})} \Big/ \frac{z^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{zq^n}{1-q^{n+1}}\right| = 0,\ \text{如果} |q| < 1.$$

作为根式判别法的例子, 我们回顾第 6 章中, 我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

因此, $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ 对 $|q| < 1$ 绝对收敛, 因为

$$\lim_{n\to\infty} |p(n)q^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} |q| = |q|,$$

所以 $|q| < 1$ 保证了这个级数绝对收敛.

无穷乘积在通常的微积分课程中有所忽略, 相对不熟悉一些.

我们定义

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) = \lim_{N\to\infty} (1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_N),$$

如果极限存在且不为 0, 我们就说无穷乘积收敛.

我们说 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ 是绝对收敛的, 如果 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛.

我们将陈述并证明三个关于无穷乘积收敛性的事实.

事实 1

如果对每个 n 都有 $a_n \geqslant 0$, 那么 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 同为收敛或同为发散.

这个断言由下面不等式立即得到:

$$1+a_0+a_1+\cdots+a_N \leqslant \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \leqslant e^{a_0+a_1+\cdots+a_N}.$$

左边的不等式对 N 用数学归纳法得到, 右边的不等式缘于对全体实数 x 都成立的下列事实,

$$1+x \leqslant e^x.$$

事实 2

如果对每个 n 都有 $1>a_n \geqslant 0$, 那么 $\prod_{n=0}^{\infty}(1-a_n)$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 同为收敛或同为发散.

这个断言的证明比前一个要微妙一点. 这是因为我们必须考虑到无穷乘积定义中要求极限值不为 0 的部分. 然而思路大致是一样的. 我们用类似的不等式: 对 $m \geqslant N$,

$$1-a_N-a_{N+1}\cdots-a_m \leqslant (1-a_N)(1-a_{N+1})\cdots(1-a_m) \leqslant e^{-a_N-a_{N+1}-\cdots-a_m}.$$

所以一方面, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么我们可以找到 N 满足 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \frac{1}{2}$. 这意味着部分乘积的非增序列 $\prod_{n=0}^{m}(1-a_n)$ 有 (对 $m \geqslant n$) 下界

$$\frac{1}{2}\prod_{n=0}^{N-1}(1-a_n),$$

从而收敛到一个正数, 即, 无穷乘积也收敛.

另一方面, 如果无穷乘积收敛, 那么存在一个正数 c 满足

$$0<c<(1-a_0)(1-a_1)\cdots(1-a_N) \leqslant e^{-a_0-a_1\cdots-a_N}$$

所以

$$\log c \leqslant -a_0 - a_1 \cdots - a_N$$

或者 $a_0 + a_1 + \cdots + a_N \leqslant \log \frac{1}{c}$. 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 因为其部分和是有界递增序列.

事实 3

如果对每个 n 都有 $|a_n| < 1$, 且 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛, 那么 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

为了证明这第三个事实是正确的, 我们定义

$$P_N = \prod_{n=0}^{N}(1+|a_n|)$$

和

$$p_N = \prod_{n=0}^{N}(1+a_n).$$

首先,

$$\begin{aligned} |p_N - p_{N-1}| &= |(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_{N-1})a_N| \\ &\leqslant (1+|a_0|)(1+|a_1|)\cdots(1+|a_{N-1}|)|a_N| \\ &= P_N - P_{N-1}. \end{aligned}$$

现在用数学归纳法对 $R > S$ 证明下式就是一个简单习题了,

$$|p_R - p_S| \leqslant P_R - P_S.$$

因此, 序列 P_N 的收敛性迫使 p_n 收敛. 剩下的就是证明 $\lim_{n\to\infty} p_n \neq 0$. 但这个从下式

$$|p_N| \geqslant (1-|a_0|)(1-|a_1|)\cdots(1-|a_N|)$$

以及以下事实得到

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 收敛,

(ii) $|a_n| < 1$ 以及

(iii) 根据事实 2, $\prod_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)$ 收敛到一个正数, 这意味着所有部分乘积有一个正常数的下界.

附录B 参考文献

H. L. Alder. Partition identities–from Euler to the present. *Amer. Math. Monthly*, 76(7):733–746, 1969.

C. Alfes, M. Jameson, and Oliver R. Proof of the Alder-Andrews conjecture. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(1):63–78, 2011.

K. Alladi. The method of weighted words and applications to partitions, from Number Theory (Paris, 1992–1993). *London Math. Soc. Lecture Note Series*, (215):1–36, 1995.

K. Alladi, G. E. Andrews, and A. Berkovich. A new four parameter q-series identity and its partition implications. *Invent. Math.*, 153(2):231–260, 2003.

G. E. Andrews. On radix representation and the Euclidean algorithm. *Amer. Math. Monthly*, 76(1):66–68, 1969a.

G. E. Andrews. Two theorems of Euler and a general partition theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20(2):499–502, 1969b.

G. E. Andrews. On a partition problem of H. L. Alder. *Pac. J. Math.*, 36(2):279–284, 1971a.

G. E. Andrews. The use of computers in search of identities of the Rogers-Ramanujan type. *Computers in Number Theory*, pages 377–387, 1971b.

G. E. Andrews. A combinatorial proof of a partition function limit. *Amer. Math. Monthly*, 78(3):276–278, 1971c.

G. E. Andrews. Partition identities. *Advances in Math.*, 9(1):10–51, 1972.

G. E. Andrews. Partition ideals of order 1, the Rogers-Ramanujan identities and computers. *Groupe d'étude d'algèbre*, 1:1–8, 1975.

G. E. Andrews. Partitions and Durfee dissection. *Amer. J. Math.*, 101(3):735–742, 1979.

G. E. Andrews. On a partition theorem of N. J. Fine. *J. Nat. Acad. Math. India*, 1(2):105–107, 1983.

G. E. Andrews. *Generalized Frobenius partitions*, volume 301. American Mathematical Society, 1984.

G. E. Andrews. *q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra.* Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by American Mathematical Society, 1986.

G. E. Andrews. On a Conjecture of Peter Borwein. *J. of Symbolic Computation*, 20 (5–6):487–501, 1995.

G. E. Andrews. *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press, 1998.

G. E. Andrews. Partitions: at the interface of q-series and modular forms. *Ramanujan J.*, 7(1-3):385–400, 2003.

G. E. Andrews, P. Paule, and A. Riese. MacMahon's partition analysis: the Omega package. *Europ. J. Comb.*, 22(7):887–904, 2001.

A. O. L. Atkin and H. P. F. Swinnerton-Dyer. Some properties of partitions. *Proc. London Math. Soc.*, 3(1):84–106, 1954.

A. Berkovich and B. M. McCoy. Rogers-Ramanujan identities: A century of progress from mathematics to physics. *Doc. Math.*, pages 163–172, 1998.

B. C. Berndt. *Ramanujan's Notebooks, Parts I-V.* Springer, 1985,1989,1991,1994,1998.

M. Bousquet-Mélou and K. Eriksson. Lecture hall partitions. *Ramanujan J.*, 1(1): 101–111, 1997a.

M. Bousquet-Mélou and K. Eriksson. Lecture hall partitions ii. *Ramanujan J.*, 1(2): 165–185, 1997b.

M. Bousquet-Mélou and K. Eriksson. A refinement of the lecture hall theorem. *J. Comb. Th. (A)*, 86(1):63–84, 1999.

D. M. Bressoud. A new family of partition identities. *Pac. J. Math.*, 77(1):71–74, 1978.

D. M. Bressoud. Some identities for terminating q-series. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 89(2):211–223, 1981.

L. Carlitz. Rectangular arrays and plane partitions. *Acta Arith.*, 13(1):29–47, 1967.

R. Chapman. A new proof of some identities of bressoud. *Int. J. Math. and Math. Sciences*, 32(10):627–633, 2002.

L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers: Diophantine analysis Vol. 2.* Courier Corporation, 2013.

F. J. Dyson. Some guesses in the theory of partitions. *Eureka (Cambridge)*, 8(10): 10–15, 1944.

N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings (Part I). *J. Alg. Combinatorics*, 1(2):111–132, 1992.

G. Gasper and M. Rahman. *Basic Hypergeometric Series, Vol. 35 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, 1990.

G. H. Hardy. *Ramanujan: Twelve lectures on subjects suggested by his life and work.* Chelsea Pub. Co., 1959.

W. Jockusch, J. Propp, and P. Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem. *arXiv preprint math/9801068*, 1998.

R. Kanigel. *Man Who Knew Infinity*. Simon and Schuster, 2015.

D. Kim and A. J. Yee. A note on partitions into distinct parts and odd parts. *Ramanujan J.*, 3(2):227–231, 1999.

M. I. Knopp. *Modular Functions in Analytic Number Theory*, volume 337. American Mathematical Society, 2008.

I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford University Press, 1998.

P. A. MacMahon. *Memoir on the theory of the partitions of numbers*, volume 1. Dulau, 1899.

P. A. MacMahon. *Combinatory Analysis, Vol. 2*. Cambridge University Press, 1916.

H. B. Mann and D. R. Whitney. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. *Annals of Math. Statistics*, 18(1):50–60, 1947.

K. Ono. Distribution of the partition function modulo m. *Annals of Math.*, 151(1): 293–307, 2000.

B. Pittel. On a likely shape of the random ferrers diagram. *Adv. Appl. Math.*, 18(4): 432–488, 1997.

S. Ramanujan. *Collected Papers*. Cambridge University Press, Cambridge, 1927; reprinted by Chelsea, New York, 1962; reprinted by the American Mathematical Society, 2000, 2000.

H. Rost. Non-equilibrium behaviour of a many particle process: density profile and local equilibria. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 58(1):41–53, 1981.

B. Sagan. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, Calif, 1991.

I. Schur. *Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche*. 1917.

I. Schur. *Zur additiven zahlentheorie*. 1926.

R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Vol. 1*. Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1986; reprinted by Cambridge University Press, Cambridge, 1996, 1996.

R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Vol. 2*. Cambridge University Press, 1999.

M. V. Subbarao. Partition theorems for Euler pairs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28(2): 330–336, 1971a.

M. V. Subbarao. On a partition theorem of MacMahon-Andrews. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 27(3):449–450, 1971b.

J. J. Sylvester and F. Franklin. A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion. *Amer. J. Math.*, 5(1):251–330, 1882.

A. J. Yee. On the combinatorics of lecture hall partitions. *Ramanujan J.*, 5(3): 247–262, 2001.

A. J. Yee. On the refined lecture hall theorem. *Discr. Math.*, 248(1):293–298, 2002.

附录 C　部分习题答案和提示

3 等式 $p(n|\text{偶数部分}) = p(n/2)$ 的一个显然的双射证明：对任意 n 分成偶数的分拆，把每个部分替换成一半大小的部分. 等式 $p(n|\text{每个部分出现偶数次}) = p(n/2)$ 的一个显然的双射证明：对每个 $n/2$ 的分拆，把每个部分替换为两个同大小的部分.

4 在合并/分裂技巧过程的每一步中，奇数部分数量的改变量为偶数 (如果一个偶数部分分裂为两个奇数部分，就会 $+2$，如果两个奇数部分合并了，就会 -2，其他情况为 0). 因此，奇数部分数量的奇偶性在整个过程中不变.

7 令 M 为所有 2 的幂或 3 乘以 2 的幂的正整数集. 那么定理 1 表明 $p(n|M$ 中的相异部分) 等于 $p(n|$ 部分属于 $\{1,3\})$. 显然，在第二类分拆中有 $\lfloor n/3 \rfloor + 1$ 种方法选择 3 的数量，那么接下来用 1 补齐整个分拆的方式就是唯一的了.

8 考虑所有在一个集合，比如说 M 中，但不在另一个集合，比如说 M' 中的整数，若 n 是其中最小的，那么 $p(n|M$ 中的相异部分$) = 1 + p(n|M'$ 中的相异部分)，这是因为除了只含 n 的那个分拆之外，其他所计数的分拆是完全一样的.

9 记 N' 是 N 中不为 2 的幂乘以 N 中某个其他元的元素的集合. 记 M' 是包含 N' 的所有元素和它们与 2 的所有幂的乘积的集合. 那么，根据定理 1，(N', M') 是一个 Euler 对. N 中的元素 $2^k a$ 是最小的不在 N' 中的元素，所以当尝试构造集合 M 满足 (N, M) 是 Euler 对时，我们被迫以与构造 M' 相同的方式构造 M，直到 $2^k a$. 对于这个元素，我们会失败，因为 $2^k a$ 已经包含在 M' 中，所以相对于那些部分来自 M' 中的相异分拆，没可能用 M 中的相异部分构造更多 $2^k a$ 的分拆. 而用 N 中的部分构造 $2^k a$ 的分拆比用 N' 中的部分要多 (恰好) 一个，即，仅由 $2^k a$ 组成的分拆.

10 条件 $2M \subset M$ 表明，对 M 中的每个元素，该元素乘每个 2 的幂都仍然在 M 中. 条件 $N = M - 2M$ 表明，N 由 M 中所有不是 2 的幂乘 M 中其他元的元素所组成. 因此，N 是满足 N 中元素不为 2 的幂乘以 N 中元素的整数集，M 是包含所有 N 中元素以及它们与 2 的所有幂的乘积的集合，所以 (N, M) 是一个 Euler 对. 反过来，如果 (N, M) 是 Euler 对，那么 $2M \subset M$ 并且 $N = M - 2M$.

12 一个 Ferrers 图是左对齐的等距点行的集合，并且每一行 (除了最后一行) 至少和其下方的行一样长.

13 提示：两个相邻的外角决定了它们之间的内角的位置.

14 提示：两个相邻的内角决定了它们之间的外角的位置.

15 提示：每一个内角在填入一个新点以

增大分拆之后, 会在下一列产生一个新的内角. 不仅如此, 我们在第一列的底部总有一个内角.

16 (a)$6+4+2$, (b)$2+1+1+1+1+1+1$, (c)$5+4+2+2+1$.

18 一个分拆的部分数量 $\leqslant m$ 当且仅当其 Ferrers 图的第一列长度 $\leqslant m$. 一个分拆的所有部分 $\leqslant m$ 当且仅当其 Ferrers 图的第一行长度 $\leqslant m$. 共轭是这两种 Ferrers 板之间显而易见的双射.

24 非自共轭的分拆成共轭对出现, 从而不影响 $p(n)$ 的奇偶性. 因此 $p(n)$ 为奇数当且仅当 $p(n|\text{自共轭})$ 是奇数; 并且根据等式 (3.4), 我们有 $p(n|\text{自共轭}) = p(|\text{相异的奇数部分})$.

25 每个 Durfee 方形边长 $= j$ 的 n 的分拆可以唯一的分解成 Durfee 方形 (尺寸为 j^2), 其下方一个每行长度至多 j 的 Ferrers 板 (比如说尺寸为 m), 及其右边一个每列长度至多 j 的 Ferrers 板 (尺寸等于剩下的点数, 即 $n-j^2-m$).

27 Fibonacci 数列开始几个为 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

29 对 $n=2$ 和 $n=4$, 观察可知恒等式 $F_n = F_{n-1}+F_{n-3}+F_{n-5}+\cdots$ 是正确的. 对于偶数 $n>4$, 用归纳法可证, 因为有 $F_n = F_{n-1}+F_{n-2} = F_{n-1}+(F_{n-3}+F_{n-5}+\cdots)$.

30 提示: 由 1 和 2 构成的 n 的有序分拆分为两类: 一类是最后一项为 1 的, 另一类是最后一项为 2 的.

31 分拆函数的值第一次与 Fibonacci 数不同是当 $n=5$ 时: $p(5)=7\neq 8=F_5$. 这是因为 5 是最小的 n 满足, 存在 $n-2$ 的分拆其中最小的非 1- 部分小于 2+1- 部分个数; 这个分拆是 $2+1$.

32 提示: $\tau^n = \tau^{n-1}+\tau^{n-2}$.

33 有 $C_4 = \binom{8}{4}/5 = 14$ 个分拆可置入高度为 4 的阶梯型: $3+2+1$, $3+2$, $3+1+1$, $3+1$, 3, $2+2+1$, $2+2$, $2+1+1$, $2+1$, 2, $1+1+1$, $1+1$, 1 以及空分拆.

35 奇数部分最终会成为图中底部那些行. 比如说有 k 个奇数部分. 那么根据图的构造, 最小的偶数部分将有 $2k+1$ 个点在线的左边 (且在线的右边至少有 1 个点). 因此, 每个偶数部分都大于奇数部分数量的两倍.

36 给定任意相异分拆, 其中偶数部分大于两倍的奇数部分数量. 调整行的顺序, 使得偶数 (长度) 行按降序排在前面, 随后排降序的奇数行. 调整左边缘产生两个点缩进的斜边. 画一条竖线使得最后一行在线的左侧有 1 个点. 我们必须证明所有行都能碰到竖线. 相异的奇数部分相差至少 2, 所以他们必定会碰到那条线. 若有 k 个奇数部分, 则最小的偶数部分至少是 $2k+2$, 所以它也达到了那条竖线, 且更大的偶数部分同样也是. 如果我们再次调整竖线右边的行按降序排列, 便得到了一个超相异分拆. 显然, 这个操作是前一个操作的逆.

39 提示: 在一个分拆对中移动最小的部分, 按 Franklin 的方式!

41 Franklin 的变换总是改变最大部分的奇偶性.

43 Sylvester 的双射将那些*不是*分成相异奇数部分的 n 的分拆两两配对, 同一对中的两个分拆部分数量差 1. 因此, 这告诉我们在所有*不是*分成相异奇数部分

的 n 的分拆中, 恰有一半具有偶数个部分. 因此为了计算下面的差

$$p(n|\text{部分的数量是偶数}) - p(n|\text{部分的数量是奇数}),$$

我们只需考虑分成相异奇数部分的分拆. 因为奇数个奇数部分的和总是奇数, 所以这些分拆的部分数量的奇偶性和 n 的奇偶性一样. 换句话说, 所有分成相异奇数部分的分拆都将贡献到正项, 如果 n 是偶数; 贡献到负项, 如果 n 是奇数.

44 Sylvester 的双射也使偶数部分数量改变恰好 1, 所以要计算下面的差

$$p(n|\text{偶数部分的数量是偶数}) - p(n|\text{偶数部分的数量是奇数}),$$

我们同样只需要考虑分成相异奇数部分的分拆. 但是此类分拆中偶数部分的数量总是偶数, 即, 0.

45 一个不是类型 (4.1) 的分拆恒等式的例子是 $p(n|$ 自共轭$)=p(n|$ 相异的奇数部分).

46 因为 $\lambda_2 \geqslant 2\lambda_1$, 我们能构造 n 分成 λ_1 个 3 和 $(\lambda_2 - 2\lambda_1)$ 个 1 的分拆. 显然这个构造是可逆的, 因此是一个双射.

48 给定一个n 的分拆 $\lambda_2 + \lambda_1$, 其中 $\frac{3}{2}\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant 0$, 我们能构造 n 分成 $(\lambda_2 - \lambda_1)$ 个 5 和 $(3\lambda_1 - 2\lambda_2)$ 个 2 的分拆. 反之, 一个分成 e_5 个 5 和 e_2 个 2 的分拆, 将被映回到一个分拆 $\lambda_2 + \lambda_1$, 其中 $\lambda_2 = 3e_5 + e_2$ 且 $\lambda_1 = 2e_5 + e_2$. 这显然满足不等式.

50 $N = \{2, 3, 7, 8, \cdots\}$, 即, 所有 模 5 同余于 2 或 3 的正整数.

51 $N = \{1, 4, 7, 9, 12, 15, \cdots\}$, 即, 所有 模 8 同余于 1, 4 或 7 的正整数.

52 $N = \{3, 4, 5, 11, 12, 13, \cdots\}$, 即, 所有 模 8 同余于 3, 4 或 5 的正整数.

53 $N = \{1, 5, 7, 11, \cdots\}$, 即, 所有 模 6 同余于 1 或 5 的正整数.

56 对 $d = 3$, 我们可以构造出 N 的最初四个元为 $\{1, 5, 7, 9\}$, 但随后对于 $n = 10$, 这个构造失败了, 因为 10 已经有 5 个分成部分属于 N 的分拆 (1^{10}, $5^1 1^5$, 5^2, $7^1 1^3$, $9^1 1^1$), 但 10 只有 4 个分拆分成 3-相异的部分 $(10, 9+1, 8+2, 7+3)$. 对 $d = 4$, 构造从 $N = \{1, 6, 8, 10, 15\}$ 开始, 在 $n = 16$ 时失败, 因为 16 有 9 个部分属于 N 的分拆, 却只有 8 个分拆是 4- 相异的.

59 N 包含了所有不被 3 整除的奇数, 而 M 包含了所有不被 3 整除的正整数. 这个 3 的可除性在第 2 章中的合并/分裂过程中是不变的.

63 根据第一类 Rogers-Ramanujan 恒等式, N 是 模 5 同余于 ± 1 的正整数集合!

98

$$\sum_{m=0}^{N} q^{m(m+1)/2} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = (1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^N),$$

以及

$$\sum_{m=0}^{N} (-1)^m q^{m(m+1)/2} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^N).$$

111 12 是唯一一个长度为 1 的阶梯教室分拆. 长度为 2 的要加上 $1+11$, $2+10$, $3+9$ 和 $4+8$. 长度为 3 的还要加上 $1+2+9$, $1+3+8$, $1+4+7$ 和 $2+4+6$. 对长度为 4 的, 我们最后加上 $1+2+3+6$, $2+3+7$ 还有 $5+7$.

112 断言 $\mathcal{L}_N \subseteq \mathcal{L}_{N+1}$等价于断言不等式 $\frac{\lambda_k}{k} \leqslant \frac{\lambda_{k+1}}{k+1}$蕴涵着不等式 $\frac{\lambda_k}{k+1} \leqslant \frac{\lambda_{k+1}}{k+2}$. 这从下面这个简单事实立刻得到: 对任意自然数 k, $\frac{k}{k+1} \leqslant \frac{k+1}{k+2}$.

113 相继部分满足不等式$\lambda_k \leqslant \frac{k}{k+1}\lambda_{k+1}$, 且对非零部分, 右边表达式将严格小于 λ_{k+1}. 因此, 非零部分是相异的.

116 提示: 这是习题 46.

119 19 分成 3 个小于 10 的奇数部分的分拆共有 4 个, 即, $9+9+1$, $9+7+3$, $9+5+5$ 和 $7+7+5$. 也有 4 个长度为 5 的 19 的阶梯教室分拆 λ 满足 $s(\lambda)=3$, 即, $8+11$, $1+8+10$, $1+2+7+9$ 和 $2+3+6+8$.

120 n 分成 S 个奇数部分的分拆数量等于 n 的相异分拆 λ 满足 $s(\lambda)=S$ 的数量.

122 $0+0$ 和 $0+1$.

124 一个阶梯教室分拆是既约的, 若对所有 $k=1,2,\cdots,N$, 当第 k 个部分减去 k 时, 阶梯教室性质就被破坏. 因此, 我们可以一次一个部分地逐步构造所有既约的阶梯教室分拆; 给定前 $k-1$ 个部分 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1}$, 我们有 k 种方式选择第 k 个部分 λ_k: 先取满足阶梯教室不等式 $\frac{\lambda_{k-1}}{k-1} \leqslant \frac{\lambda_k}{k}$的最小值, 然后加上 0 到 $k-1$ 中的任意整数.

126 对于 $N=2$, 我们得到 $1+2$(大小为 3) 和 $0+2$(大小为 2) 这样的块, 而对应的既约的阶梯教室分拆是 $0+0$(大小为 0) 和 $0+1$(大小为 1). 生成函数就是

$$\begin{aligned}&\frac{q^0+q^1}{(1-q^3)(1-q^2)}\\=&\frac{(1-q^2)/(1-q)}{(1-q^3)(1-q^2)}\\=&\frac{1}{(1-q)(1-q^3)}.\end{aligned}$$

127 需要证明长度为 N 的既约的阶梯教室分拆的生成函数等于

$$\frac{(1-q^{1+2+\cdots+N})(1-q^{2+\cdots+N})\cdots(1-q^N)}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2N-1})}.$$

我们因此将问题简化到了寻找既约的阶梯教室分拆的生成函数, 但这也是一个不平凡的问题.

128 一个双射证明是: 从一个部分小于 $2N$ 的奇分拆开始, 重复地合并小于等于 N 的相等部分. 它的逆映射是重复地将偶数部分均分成两半. 生成函数证明则是要验证下列恒等式:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2N-1})}\\=&\frac{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^N)}{(1-q^{N+1})(1-q^{N+2})\cdots(1-q^{2N})}.\end{aligned}$$

使用恒等式$\frac{(1+q^N)}{(1-q^{2N})/(1-q^N)}=1$ 并对 N 用归纳法很容易证明它.

139 要么是这种分拆, 要么是它的共轭分拆, 必然只含一个部分.

140 对于 Ferrers 板, 显然如果 λ 含于 μ, 那么两个 Ferrers 板同时取共轭不影响这个关系.

141 字典序是在字典中使用的序关系; 把一个分拆 (部分降序排列) 看作以正整数作为字母表的词, 然后按在一个字典中它们会被找到的先后顺序排列它们. 例如, 在这个序关系下, 我们有$1 <_{\text{lex}} 1+$

$1 <_{\text{lex}} 1+1+1 <_{\text{lex}} \cdots <_{\text{lex}} 2 <_{\text{lex}} 2+1 <_{\text{lex}} 2+1+1 <_{\text{lex}} \cdots <_{\text{lex}} 2+2$.

143 通常序 $\lambda \preceq \mu$ 可描述为不等式 $\lambda_1 \leqslant \mu_1, \lambda_2 \leqslant \mu_2, \lambda_3 \leqslant \mu_3$, 等等. 显然这将蕴涵优势序的不等式. 反过来不对; 例如, $1+1 \trianglelefteq 2$ 但是 $1+1 \not\preceq 2$.

145 含 5 个方格的标准表有 26 个.

149 元素 n 要么自己构成一元块 (剩余 $n-1$ 个元需要进行集合分拆), 要么它将与其余 $n-1$ 个元中任一个配对构成二元块 (剩余 $n-2$ 个元需要进行集合分拆).

150 $f^6=1, f^{5+1}=5, f^{4+2}=9, f^{4+1+1}=10, f^{3+3}=5, f^{3+2+1}=16$.

152 和式 $\sum_{\lambda \vdash n}(f^\lambda)^2$ 的值为 $n!$. 这个可以利用精巧的 Robinson-Schensted-Knuth 对应来证明, 见 Stanley (1999).

153 验证两行分拆 $n+m$ 的钩长公式简化为 $(n+m)!(n+1-m)/(n+1)!m!$, 然后只需通过代数运算验证递归关系.

157 二元序列描述了 Ferrers 板的轮廓, 其中 0 表示向上一步, 1 表示向右一步. 一对 01 对应着一步向上紧接着一步向右, 即一个内角. 在这个内角处加入一个方格显然将这个对变成了 10.

160 在一个黑白棋盘中, 每一个多米诺骨牌总是覆盖两种颜色的方格各一个, 因此在任何棋盘子集的平铺中, 白方格的数量必然等于黑方格的数量. 因此, 移走两个同色方格实际上消除了多米诺骨牌平铺的所有可能性, 而对角处两个方格正是同色的.

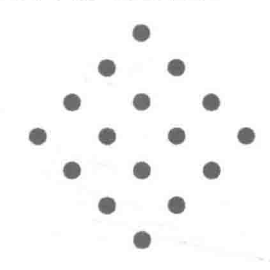
161 提示: 找到一条闭路径, 从方格到其相邻方格且遍历整个棋盘的所有方格恰好一次 (这是容易的). 移走黑方格和白方格各一个会将整个闭路径切成两段, 各自首尾都是一黑一白, 从而是偶数长度的, 故可被多米诺骨牌平铺.

162 提示: 证明阶梯型 Ferrers 板不能有同样多的白方格和黑方格.

163 必要条件白方格和黑方格同样多事实上也是 Ferrers 板是多米诺骨牌可平铺的充分条件. 充分性用归纳法证明: 因为 Ferrers 板不能是阶梯型 (根据上题), 所以在它边缘上某处必定可以移走一个多米诺骨牌, 留下的是一个满足条件的更小的 Ferrers 板.

164 提示: 仅有几种多米诺骨牌重叠的情况, 其中每一种都因为不可能出现而被排除掉.

165 将阿兹特克钻石中的小圆点视为一个无限网格中的可见部分:



在滑动阶段, 最顶上的多米诺骨牌被移动了一步, 因此小圆点的整体图案也应该被移动一步 (要么向两侧, 要么向上, 对这个无限网格来说显然是一样的). 因为所有多米诺骨牌也向两侧或向右滑动了一步, 它们所含的箭头将与小圆点的位置协调一致.

167 证明概要:

- 证明在好区被去掉之后反向滑动不会产生重叠. (简单, 只需要检查两

种可能的重叠情况.)

- 验证新的平铺必然被包含在小一个尺寸的阿兹特克钻石中. (简单, 只需考察靠近边界处的多米诺骨牌如何滑动.)
- 证明这个新的阿兹特克钻石所含空隙可以被分成 2×2 的洞, 从而被坏区所填充.

168 由操作的可逆性, 一个阿兹特克钻石的任意多米诺骨牌平铺都可以通过洗牌得到. 一个尺寸为 m 的阿兹特克钻石会比小一个尺寸的 (沿着边界) 多包含 $4m$ 个方格, 所以在从尺寸 $m-1$ 洗牌得到尺寸 m 的过程中若去掉了 b 个坏区, 那么必须添加 $b+m$ 个好区. 坏区的 2^b 种定向中的任一种都可以得到好区的 2^{b+m} 种定向中的任一种, 故比率为 2^m, 与 b 无关. 因此, 如果尺寸为 $m-1$ 的阿兹特克钻石按 $2^{-(m-1)m/2}$ 等概率生成, 则得到任一个特定的尺寸为 m 的阿兹特克钻石的概率是

$$2^{-(m-1)m/2} \cdot 2^{-m} = 2^{-m(m+1)/2}.$$

索　引

Z

其他

《现代数学译丛》已出版书目

（按出版时间排序）

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007.12 〔德〕Andreas Enge 著 吴 铤 董军武 王明强 译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008.1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译
3 现代非参数统计 2008.5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译
4 最优化问题的扰动分析 2008.6 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译
5 统计学完全教程 2008.6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译
6 应用偏微分方程 2008.7 〔英〕John Ockendon, Sam Howison, Andrew Lacey & Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译
7 有向图的理论、算法及其应用 2009.1 〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷 著 姚兵 张忠辅 译
8 微分方程的对称与积分方法 2009.1〔加〕乔治 W. 布卢曼 斯蒂芬 C. 安科 著 闫振亚 译
9 动力系统入门教程及最新发展概述 2009.8 〔美〕Boris Hasselblatt & Anatole Katok 著 朱玉峻 郑宏文 张金莲 阎欣华 译 胡虎翼 校
10 调和分析基础教程 2009.10 〔德〕Anton Deitmar 著 丁勇 译
11 应用分支理论基础 2009.12 〔俄〕尤里·阿·库兹涅佐夫 著 金成桴 译
12 多尺度计算方法——均匀化及平均化 2010.6 Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著 郑健龙 李友云 钱国平 译
13 最优可靠性设计：基础与应用 2011.3 〔美〕Way Kuo, V. Rajendra Prasad, Frank A.Tillman, Ching-Lai Hwang 著 郭进利 闫春宁 译 史定华 校
14 非线性最优化基础 2011.4 〔日〕Masao Fukushima 著 林贵华 译
15 图像处理与分析：变分，PDE，小波及随机方法 2011.6 Tony F. Chan, Jianhong (Jackie) Shen 著 陈文斌，程晋 译
16 马氏过程 2011.6 〔日〕福岛正俊 竹田雅好 著 何萍 译 应坚刚 校

17 合作博弈理论模型 2011.7 〔罗〕Rodica Branzei 〔德〕Dinko Dimitrov 〔荷〕Stef Tijs 著 刘小冬 刘九强 译

18 变分分析与广义微分 I：基础理论 2011. 9 〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著 赵亚莉 王炳武 钱伟懿 译

19 随机微分方程导论应用(第 6 版) 2012. 4 〔挪〕Bernt Øksendal 著 刘金山 吴付科 译

20 金融衍生产品的数学模型 2012.4 郭宇权(Yue-Kuen Kwok) 著 张寄洲 边保军 徐承龙 等 译

21 欧拉图与相关专题 2012.4 〔英〕Herbert Fleischner 著 孙志人 李 皓 刘桂真 刘振宏 束金龙 译 张 昭 黄晓晖 审校

22 重分形：理论及应用 2012.5 〔美〕戴维·哈特 著 华南理工分形课题组 译

23 组合最优化：理论与算法 2014. 1 〔德〕 Bernhard Korte Jens Vygen 著 姚恩瑜 林治勋 越民义 张国川 译

24 变分分析与广义微分 II：应用 2014. 1 〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著 李 春 王炳武 赵亚莉 王 东 译

25 算子理论的 Banach 代数方法(原书第二版) 2014.3 〔美〕 Ronald G. Douglas 著 颜 军 徐胜芝 舒永录 蒋卫生 郑德超 孙顺华 译

26 Bäcklund 变换和 Darboux 变换——几何与孤立子理论中的应用 2015.5 〔澳〕C. Rogers W. K. Schief 著 周子翔 译

27 凸分析及应用捷径 2015.9 〔美〕 Boris S. Mordukhovich Nguyen Mau Nam 著 赵亚莉 王炳武 译

28 利己主义的数学解析 2017.8 〔奥〕 K. Sigmund 著 徐金亚 杨 静 汪 芳 译

29 整数分拆 2017.9〔美〕George E. Andrews 〔瑞典〕Kimmo Eriksson 著 傅士硕 杨子辰 译